

ANA MARGARIDA DE OLIVEIRA

**ANÁLISE DE DISPOSITIVOS
ELETROMAGNÉTICOS TRIFÁSICOS MODELADOS
POR ELEMENTOS FINITOS 2D CONECTADOS AOS
SEUS CIRCUITOS EXTERNOS DE ALIMENTAÇÃO**

FLORIANÓPOLIS

2000

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA
ELÉTRICA

ANÁLISE DE DISPOSITIVOS
ELETROMAGNÉTICOS TRIFÁSICOS MODELADOS
POR ELEMENTOS FINITOS 2D CONECTADOS AOS
SEUS CIRCUITOS EXTERNOS DE ALIMENTAÇÃO

Dissertação submetida à Universidade Federal de Santa Catarina como parte dos requisitos
para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

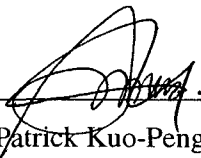
ANA MARGARIDA DE OLIVEIRA

Florianópolis, Março de 2000

ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS TRIFÁSICOS MODELADOS POR ELEMENTOS FINITOS 2D CONECTADOS AOS SEUS CIRCUITOS EXTERNOS DE ALIMENTAÇÃO

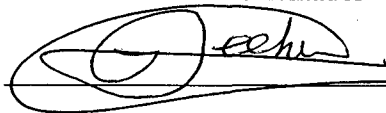
Ana Margarida de Oliveira

‘Esta Dissertação foi julgada adequada para obtenção do Título de Mestre em Engenharia Elétrica, Área de Concentração em Concepção e Análise de Dispositivos Eletromagnéticos, e aprovada em sua forma final pelo Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.’



Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.

Orientador



Prof. Ildemar Cassana Decker, D. Sc.

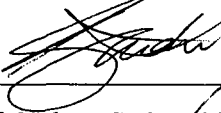
Coordenador do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Banca Examinadora:



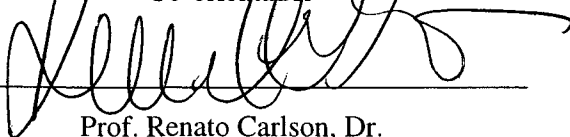
Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr.

Orientador

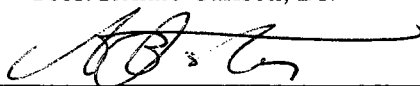


Prof. Nelson Sadowski, Dr.

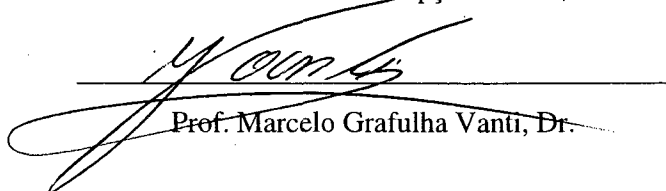
Co-orientador



Prof. Renato Carlson, Dr.



Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr.



Prof. Marcelo Grafulha Vanti, Dr.

Ao meu pai Ali,
minha mãe Revanier
e meu esposo e companheiro João Marco.

Agradecimentos

Ao meu orientador Professor Patrick Kuo-Peng pela dedicação e interesse demonstrados durante o desenvolvimento deste trabalho, e pelos inúmeros momentos de descontração que atenuaram as tensões, naturais em um processo de aprendizado.

Ao meu co-orientador Professor Nelson Sadowski, presente e solícito nos momentos de dúvidas e definições, por toda a atenção dispensada, orientações e apoio recebidos.

A todos os professores do GRUCAD pelo incentivo e ajuda constante: Prof. Adroaldo Raizer, Professor Renato Carlson e Prof. Marcelo Grafulha Vanti e, especialmente, Prof. João Pedro Assumpção Bastos pela oportunidade de conviver com este grupo tão rico e absorver um pouco de seu conhecimento.

Ao colega Jorge pela orientação dada que me poupou preciosas horas de estudo, ao Maurício e Jhoe pelos momentos de estudo e discussão, ao Hugo pela parceria durante os créditos, ao Luis, Golberi e Ana Cristina pela motivação e apoio, e a todos os demais colegas pela acolhida, carinho e incentivo.

Aos meus pais, Ali e Revanier, pelo amor e compreensão infinitos, sem eles minhas conquistas não seriam possíveis.

Ao meu esposo e companheiro João Marco pelo carinho, paciência, compreensão e apoio nas intermináveis horas de trabalho.

Acima de tudo, a Deus, meu amparo.

Resumo da Dissertação apresentada à UFSC como parte dos requisitos necessários para a obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

ANÁLISE DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS TRIFÁSICOS MODELADOS POR ELEMENTOS FINITOS 2D CONECTADOS AOS SEUS CIRCUITOS EXTERNOS DE ALIMENTAÇÃO

Ana Margarida de Oliveira

Mar./2000

Orientador: Patrick Kuo-Peng

Co-orientador: Nelson Sadowski

Área de Concentração: Máquinas Elétricas

Palavras-chave: Dispositivos Eletromagnéticos Trifásicos, Elementos Finitos 2D, Acoplamento Automático das Equações de Campos Eletromagnéticos e Circuitos Elétricos.

Número de páginas: 81

O presente trabalho aborda o desenvolvimento e a implementação de um método de análise de dispositivos eletromagnéticos trifásicos alimentados por circuitos elétricos externos. O dispositivo eletromagnético é modelado pelo Método de Elementos Finitos em duas dimensões e o equacionamento do circuito é feito em variáveis de espaço de estados. Um acoplamento forte entre os dois sistemas de equações é conseguido utilizando-se as grandezas comuns a ambos, isto é: as correntes e as tensões nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético. A montagem dos sistemas de equações é totalmente automática e sua resolução simultânea. Este método está implementado no programa denominado EFCIR, um Programa de Simulação Numérica de Conversores Estáticos Associados a Estruturas Eletromagnéticas Modeladas pelo Método de Elementos Finitos.

A fim de validar o método proposto, foram realizadas simulações e comparações são feitas com o programa PSPICE.

Abstract of Dissertation presented to UFSC as a partial fulfillment of the requirements for the degree of Master in Electrical Engineering.

ANALYSIS OF THREE-PHASE ELECTROMAGNETIC DEVICES MODELLED BY TWO-DIMENSIONAL FINITE ELEMENTS METHOD COUPLED TO ITS EXTERNAL FEEDING CIRCUITS

Ana Margarida de Oliveira

Mar./2000

Advisor: Patrick Kuo-Peng

Co-advisor: Nelson Sadowski

Area of Concentration: Electrical Machines

Keywords: Three-Phase Electromagnetic Devices, Two-Dimensional Finite Elements , Automatic Coupling of Electromagnetic Fields and Electrical Circuits Equations.

Number of Pages: 81

This work deals with the development and implementation of a analysis method of three-phase electromagnetic devices fed by external electric circuits. The electromagnetic device is modeled by two-dimensional finite element method and the circuit equations are written in a state space form. A strong coupling of the two equations systems is obtained using both common variables, which are, the currents and the voltages of their electromagnetic device windings. The assembly of the equation systems is performed automatically and its resolution is simultaneous. This method is implemented in a program called EFCIR, with is a Numerical Simulation Program of Static Converters Associated to Electromagnetic Structures Modeled by the Finite Elements Method.

In order to validate the proposed method, simulations are performed and comparisons are performed between EFCIR and the program PSPICE.

Sumário:

Dedicatória	iii
Agradecimentos	iv
Resumo	v
Abstract	vi
Sumário	vii
Introdução Geral	1
Capítulo 1: Equações do Dispositivo Eletromagnético	
1.1. Introdução	5
1.2. Equações de Maxwell	6
1.3. Potencial Vetor Magnético: \vec{A}	8
1.4. Condições de Contorno	11
1.5. Equacionamento dos Condutores	14
1.6. Equação Global da Estrutura Eletromagnética	16
1.7. Método de Elementos Finitos	17
1.7.1. Aplicação do Método Residual	17
1.7.2. Método de Galerkin	20
1.8. Sistema de Equações do Dispositivo Eletromagnético	22
1.9. Conclusão	24
Capítulo 2: Estudo Topológico de Circuitos Elétricos	
2.1. Introdução	25

2.2. Topologia dos Circuitos	25
2.2.1 Matriz de Cortes Fundamentais: K_2	29
2.2.2. Matriz de Laços Fundamentais: B_1	31
2.2.3. Relação entre K_2 e B_1	32
2.3. Determinação Automática de K_2	34
2.3.1. Matriz de Incidência: F	34
2.3.2. Algoritmo de Welsh	36
2.4. Conclusão	39
Capítulo 3: Acoplamento das Equações do Dispositivo Eletromagnético e do Circuito Externo de Alimentação	
3.1. Introdução	40
3.2. Associação das Equações de Campo e do Circuito de Alimentação	41
3.3 Equacionamento em Variáveis de Estado dos Circuitos de Alimentação	44
3.4 Chaveamento nos Circuitos de Alimentação	49
3.4.1. Cálculo da Tensão nos Terminais dos Interruptores	51
3.5. Conclusão	52
Capítulo 4: Análise de Dispositivos Trifásicos Conectados a Circuitos Elétricos Externos de Alimentação	
4.1. Introdução	53
4.2. Análise de Circuitos Trifásicos	53
4.2.1. Resolução Analítica	54
4.2.2. Resolução Utilizando o Método Implementado no Programa EFCIR	58
4.3. Conclusão	63

Capítulo 5: Aplicações e Resultados

5.1. Introdução	65
5.2. Retificador Trifásico em Ponte	66
5.3. Conversor Trifásico de Meia-Onda	70
5.4. Motor Trifásico de Imãs Permanentes	75
5.5.	76
Conclusão Geral	78
Bibliografia	80

Introdução Geral

O comportamento de dispositivos eletromagnéticos é caracterizado pela distribuição dos campos eletromagnéticos em seu interior e na região ao seu redor. As quatro equações denominadas Equações de Maxwell, em conjunto com suas Relações Constitutivas, englobam em si todas as relações existentes entre as grandezas eletromagnéticas, tornando possível a análise temporal e/ou espacial do comportamento de campos eletromagnéticos nos diferentes meios presentes, assim como da interdependência existente entre suas componentes, o campo elétrico e o campo magnético [1].

No entanto, a solução destas equações é, na maioria dos casos reais, de difícil abordagem por métodos analíticos. A complexidade encontrada na geometria dos dispositivos reais, bem como nas diversas interfaces entre meios com características diferentes, exigem o desenvolvimento de métodos numéricos para representação e solução destas equações. Com o contínuo desenvolvimento dos computadores digitais, métodos numéricos mais precisos podem ser utilizados para descrever o comportamento dos campos eletromagnéticos em estruturas reais.

Neste trabalho é utilizada uma particularização das Equações de Maxwell, trabalharemos com o conjunto de equações que descrevem os fenômenos magnetodinâmicos, aplicado a casos em eletrotécnica. A formulação é feita utilizando-se o potencial vetor magnético e a representação do domínio de cálculo, em duas dimensões.

A discretização do domínio de estudo é feita utilizando-se o Método de Elementos Finitos, que é uma técnica numérica na qual o domínio de cálculo deve ser decomposto ou discretizado em pequenas regiões, denominadas elementos finitos, que neste trabalho são elementos isoparamétricos de primeira ordem. O método de elementos finitos bidimensional é usualmente utilizado na modelagem de dispositivos eletromagnéticos, permitindo o estudo do comportamento local destes dispositivos, levando em conta as correntes de Foucault nas partes condutoras, a saturação dos materiais ferromagnéticos, assim como os movimentos das partes móveis [1] [11] [13].

O Método de Galerkin, particularização do Método de Resíduos Ponderados, é utilizado para a obtenção das equações resolvidas numericamente. Após a aplicação dos

métodos de Elementos Finitos e Galerkin, obtém-se um sistema matricial de equações que descreve o comportamento da estrutura eletromagnética.

Quando as estruturas eletromagnéticas estão associadas a circuitos de alimentação mais ou menos complexos, é importante considerar um acoplamento forte entre as equações do circuito exterior de alimentação e as equações do campo magnético da estrutura. Assim, para simularmos dispositivos eletromagnéticos alimentados por circuitos elétricos externos é realizada a resolução simultânea destes dois sistemas de equações presentes. O acoplamento destes sistemas é feito utilizando-se as variáveis que são comuns a ambos: as correntes e tensões nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético [5] [9].

No equacionamento do circuito elétrico é utilizada a Teoria dos Grafos aliada a Teoria de Circuitos Elétricos [15]. Estas teorias possibilitam a montagem de um sistema matricial de equações, utilizando-se variáveis em espaço de estado, que permite a determinação de todas as variáveis do circuito, correntes e tensões em cada um de seus elementos, a partir da declaração inicial de sua topologia.

O circuito de alimentação pode conter, dentre os diversos elementos que o compõe, dispositivos semicondutores operando como chaves ou interruptores. Estes dispositivos mudam seus estados determinando novas seqüências de operação do circuito, o que altera suas características elétricas. Como, durante um intervalo de simulação, várias mudanças de estado podem ocorrer nos diversos interruptores do circuito, a determinação destas mudanças, e conseqüentemente das diversas seqüências de operação, deve ser feita de forma totalmente automática, dispensando um conhecimento anterior destas seqüências. A modelagem em variáveis de estado adotada, vinculada à topologia do circuito, possibilita a automatização deste procedimento. Para isso, adota-se, neste trabalho, um modelo resistivo binário para estes semicondutores de potência.

No estado atual do programa EFCIR (Programa de Simulação Numérica de Conversores Estáticos Associados a Estruturas Eletromagnéticas Modeladas pelo Método dos Elementos Finitos), este método pode ser utilizado para simulação dos casos onde os circuitos de alimentação são monofásicos acoplados a dispositivos magnéticos estáticos ou estruturas simples que apresentem movimento mecânico translacional.

O objetivo geral do presente trabalho é adequar este método para resolução também de sistemas de equações elétricas e magnéticas quando o circuito de alimentação e o dispositivo eletromagnético são trifásicos, pois o método formulado até então não é aplicável a este tipo de conjunto conversor / dispositivo trifásico, havendo assim uma lacuna a ser preenchida neste campo de estudos.

Esta limitação ocorre devido a forma como os dois sistemas de equações estão acoplados. O circuito elétrico associado à estrutura eletromagnética é um sistema concentrado, ou seja, seus elementos são modelados por parâmetros concentrados. Assim sendo, os enrolamentos do dispositivo eletromagnético são considerados como parâmetros concentrados na declaração da topologia do circuito e, ao mesmo tempo, são modelados por parâmetros distribuídos pelas equações de campo que descrevem o dispositivo. A Teoria dos Grafos Lineares, utilizada na formulação do circuito elétrico, fornece o número necessário de equações linearmente independentes para resolução do circuito concentrado mas estas equações, na maioria dos casos trifásicos, são insuficientes para resolução do sistema distribuído. Desta forma, torna-se necessário obter novas equações, linearmente independentes das anteriores, que completem o sistema, possibilitando o acoplamento das equações de campo e de circuito.

Assim, este projeto visa o desenvolvimento de uma nova metodologia de cálculo das equações elétricas e magnéticas que possibilite a resolução dos casos trifásicos e sua implementação computacional no software existente, para aplicação em conjuntos conversor / dispositivo eletromagnético estáticos trifásicos.

Destacam-se os seguintes objetivos específicos:

- Estudo da modelagem de dispositivos eletromagnéticos pelo método de elementos finitos em duas dimensões;
- Estudo da representação em variáveis de estado do circuito elétrico de alimentação acoplada às equações dos campos eletromagnéticos;
- Pesquisa de soluções que permitam simular os conversores estáticos associados às estruturas eletromagnéticas trifásicas;
- Implementação computacional do método adotado.

Para expor todos os objetivos específicos, o presente trabalho divide-se nos seguintes capítulos:

Capítulo 1) Equações do Dispositivo Eletromagnético, onde são apresentadas as equações que descrevem o comportamento dos campos em um dispositivo eletromagnético em duas dimensões;

Capítulo 2) Estudo Topológico de Circuitos Elétricos, onde é apresentada a Teoria dos Grafos. Esta teoria permite a determinação automática das matrizes que descrevem o circuito elétrico externo que será acoplado ao dispositivo eletromagnético;

Capítulo 3) Acoplamento das Equações do Dispositivo Eletromagnético e do Circuito Externo de Alimentação, onde são apresentadas as equações em espaço de estados do circuito elétrico e seu acoplamento com as equações do dispositivo eletromagnético. Aqui é apresentado um método geral para o acoplamento das equações do conjunto conversor / dispositivo eletromagnético trifásicos estáticos;

Capítulo 4) Análise de Dispositivos Trifásicos Conectados a Circuitos Elétricos Externos de Alimentação, onde é apresentada a resolução analítica de um circuito retificador trifásico de meia-onda alimentado por um transformador trifásico. Neste exemplo é evidenciada a forma como eram equacionados problemas trifásicos e os erros que ocorriam nas matrizes finais do sistema de equações matriciais e a solução implementada após este trabalho;

Capítulo 5) Aplicações e Resultados, onde são apresentados alguns exemplos utilizando-se o método proposto; os resultados obtidos são validados utilizando-se o programa EFCAD, processador EFCM, e PSPICE;

Conclusão Geral.

Capítulo 1: Equações do Dispositivo Eletromagnético

1.1. Introdução

Este capítulo trata das equações que descrevem as estruturas eletromagnéticas alimentadas por conversores estáticos. Utiliza em sua formulação uma particularização das Equações de Maxwell, que descrevem o comportamento dos campos eletromagnéticos, e de suas Relações Constitutivas. Este conjunto de equações é então aplicado a casos em eletrotécnica, sendo admitidas simplificações que nos permite desacoplá-las em dois outros sistemas que descrevem problemas distintos: a eletrostática e o magnetismo [1]. Trabalharemos com o conjunto de equações que descrevem os fenômenos magnetodinâmicos.

É apresentada a formulação utilizando o potencial vetor magnético, o que permite sua aplicação em casos que apresentem ou não correntes elétricas em seus domínios de cálculo. A representação em duas dimensões possibilita a simplificação no tratamento deste potencial, não se tornando necessário relevar sua natureza vetorial [1] [11] [13].

Os dispositivos eletromagnéticos analisados são apresentados em domínios de cálculo limitados, possuindo diversos sub-domínios preenchidos por materiais diferentes. Assim, torna-se necessária a introdução de Condições de Contorno, que condicionam os campos na interface entre diferentes meios e nos limites do domínio a se aproximarem do comportamento real [1] [13].

Dois tipos de condutores podem estar presentes na estrutura: os condutores maciços ou espessos, considerados conexos (ligados entre si) e curto-circuitados, e os condutores finos ou multifilamentares, alimentados por circuitos externos [13].

É adotado o Método de Elementos Finitos para discretização do problema em elementos isoparamétricos triangulares de primeira ordem. O Método de Galerkin, particularização do Método de Resíduos Ponderados, é utilizado para a obtenção das equações que serão resolvidas numericamente.

A condensação das matrizes elementares dos diversos elementos da malha resulta no sistema matricial que descreve o comportamento da estrutura eletromagnética [13].

1.2. Equações de Maxwell

As quatro Equações de Maxwell englobam em si todas as relações existentes entre as grandezas eletromagnéticas [1]. Através delas é possível a análise do comportamento espacial e/ou temporal de campos eletromagnéticos, assim como da interdependência existente entre suas componentes: o campo elétrico, \vec{E} , e o campo magnético, \vec{H} .

Abaixo, estas equações estão apresentadas em sua forma local ou pontual, sendo assim aplicáveis a quaisquer situações. Estão expressas em função dos campos elétrico e magnético e também de suas respectivas induções elétrica, \vec{D} , e magnética, \vec{B} . São estes os quatro campos vetoriais que compõem e caracterizam o campo eletromagnético.

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{J} \quad (1.2)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div}\vec{D} = \rho \quad (1.4)$$

onde:

- \vec{E} - vetor campo elétrico (V/m);
- \vec{B} - vetor indução magnética (T);
- t - tempo (s);
- \vec{H} - vetor campo magnético (A/m);
- \vec{D} - vetor indução elétrica (C/m²);
- \vec{J} - densidade superficial de corrente elétrica (A/m²);
- ρ - densidade volumétrica de carga elétrica (C/m³);

Somam-se a estas equações as Relações Constitutivas ou Complementares. São elas as responsáveis pela declaração das características do meio onde existem os campos

eletromagnéticos. A presença de não-linearidades, ou induções remanentes, ou mesmo o comportamento dos campos na interface entre meios diferentes é introduzida com o auxílio deste conjunto de equações:

$$\vec{B} = \|\mu(H)\|\vec{H} + \vec{B}_0 \quad (1.5)$$

$$\vec{D} = \|\epsilon\|\vec{E} \quad (1.6)$$

$$\vec{J} = \|\sigma\|\vec{E} \quad (1.7)$$

onde:

- $\|\mu(H)\|$ - tensor de permeabilidade magnética do meio (H/m);
- \vec{B}_0 - indução magnética remanente (T);
- $\|\epsilon\|$ - tensor de permissividade elétrica do meio (F/m);
- $\|\sigma\|$ - tensor de condutividade elétrica do meio (1/Ωm).

Durante este trabalho, lidaremos com casos em eletrotécnica. Desta forma, algumas simplificações serão admitidas [1] [13]:

1º. A corrente de deslocamento é desprezível em comparação com a corrente de

$$\text{condução} \left(\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ll \vec{J} \right): \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0;$$

Sob esta condição, o conjunto das Equações de Maxwell pode ser desacoplado em dois grupos principais, eletrostática e magnetismo, que podem ser estudados de forma independente.

2º. Não existe desequilíbrio de cargas elétricas: $\rho = 0$;

3º. Os meios dielétricos e condutores são lineares, ou seja, ϵ e σ são constantes, podendo ser desconsiderada sua natureza tensorial;

4º. Os meios magnéticos são isotrópicos porém não-lineares, podendo sofrer o fenômeno da saturação: $\mu(H)$.

Assim, as Equações de Maxwell e suas Relações Complementares abordadas são:

$$\text{rot}\vec{H} = \vec{J} \quad (1.8)$$

$$\text{div}\vec{B} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad (1.10)$$

$$\text{div}\vec{D} = 0 \quad (1.11)$$

$$\vec{B} = \mu(H)\vec{H} + \vec{B}_0 \quad (1.12)$$

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \quad (1.13)$$

$$\vec{J} = \sigma\vec{E} \quad (1.14)$$

O sistema constituído pelas equações (1.8), (1.9), (1.10), (1.12) e (1.14) tem a propriedade de tratar os problemas de magnetismo. Problemas de magnetostática não apresentam a variação temporal da indução magnética $\left(\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0\right)$. Nos casos em que esta variação está presente temos problemas de magnetodinâmica. São estes os casos de principal interesse neste trabalho.

Aplicando-se a divergência em ambos os lados da equação (1.14), e com o auxílio das equações (1.13) e (1.11), obtemos a equação da conservação da corrente elétrica:

$$\text{div}\vec{J} = 0 \quad (1.15)$$

1.3. Potencial Vetor Magnético: \vec{A}

Para abrangermos todo o domínio de estudo, podendo estar presentes regiões onde existam correntes elétricas, utilizaremos o potencial vetor magnético, \vec{A} , na formulação do problema [1] [11] [13]. A partir da equação (1.9) podemos introduzi-lo através da relação:

$$\vec{B} = \text{rot}\vec{A} \quad (1.16)$$

uma vez que a identidade:

$$\text{div}(\text{rot} \vec{X}) = 0, \forall \vec{X} \quad (1.17)$$

Substituindo (1.16) em (1.10), obtemos:

$$\text{rot} \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = 0 \quad (1.18)$$

A equação acima nos permite definir um potencial escalar elétrico, ϕ , que se relaciona com (1.18) através de seu gradiente.

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\text{grad} \phi \quad (1.19)$$

Utilizando as equações (1.14), (1.8), (1.12), (1.16) e (1.19), obtemos a equação do sistema magnetodinâmico:

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}) = \sigma \left\{ -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \text{grad} \phi \right\} + \text{rot} \nu \vec{B}_0 \quad (1.20)$$

onde:

- ϕ - potencial escalar elétrico [V];
- ν - relutividade magnética do meio (inverso da permeabilidade: $\nu = 1/\mu$).

A equação (1.20) é relativa ao potencial vetor magnético em regiões onde existam imãs permanentes. Em regiões onde estes imãs não estão presentes, \vec{B}_0 será nula. Além disso, em regiões onde têm-se $\sigma \neq 0$ e existem correntes impostas externamente, a equação (1.20) é expressa como:

$$\text{rot}(\nu \text{rot} \vec{A}) = \vec{J}_s \quad (1.21)$$

onde:

- \vec{J}_s - densidade de corrente imposta.

Em regiões onde $\sigma = 0$ e não existem correntes impostas:

$$\text{rot}(\nabla \text{rot} \vec{A}) = 0 \quad (1.22)$$

Em problemas tratados em duas dimensões, o campo magnético \vec{H} e sua indução magnética \vec{B} pertencem ao plano de estudo oxy [1] [13]. Então, através das equações (1.16) e (1.8), podemos verificar que os vetores \vec{A} e \vec{J} possuem apenas uma componente, sendo esta perpendicular ao plano oxy , ou seja, na direção do eixo oz . Isto nos permite simplificar o tratamento destas grandezas, irrelevando sua natureza vetorial.

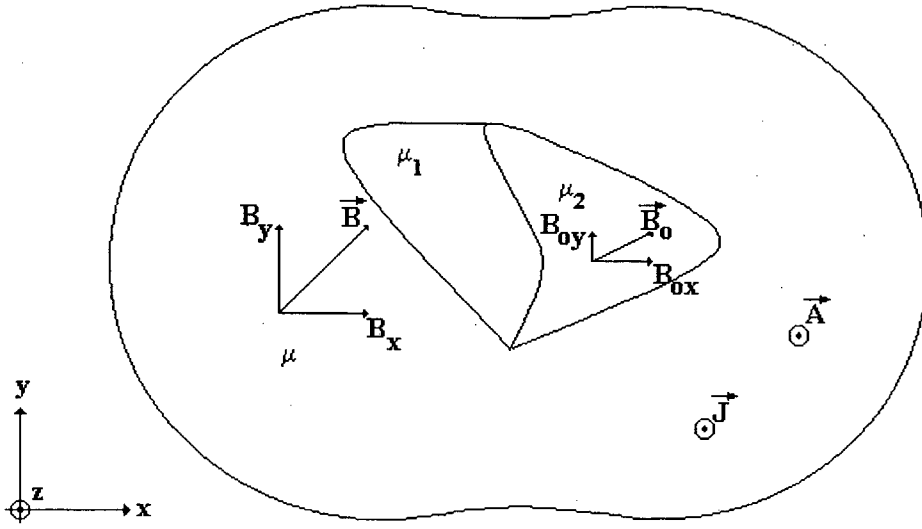


Figura 1.1 – Representação do domínio em duas dimensões.

$$\vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j} \quad (1.23)$$

$$\vec{A} = A \vec{k} \quad (1.24)$$

$$\vec{J} = J \vec{k} \quad (1.25)$$

onde:

- B_x e B_y - componentes da indução magnética na direção dos eixos ox e oy , respectivamente;
- \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} - vetores unitários ortogonais do sistema de coordenadas cartesianas.

Na hipótese de um sistema bidimensional, podemos abrir o primeiro membro da equação (1.20), colocando-a na forma:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad} \phi + v_o \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v_o \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} = 0 \quad (1.26)$$

onde:

- B_{ox} e B_{oy} - componentes de \vec{B}_o segundo as direções dos eixos ox e oy , respectivamente.

e reescrever seus dois primeiros termos, obtendo:

$$\text{div}(v \text{grad} A) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} - \sigma \text{grad} \phi + v_o \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v_o \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} = 0 \quad (1.27)$$

1.4. Condições de Contorno

A estrutura eletromagnética a ser analisada pertence a um domínio de cálculo limitado. Este possui fronteiras, fisicamente próximas à estrutura, que o delimitam. Em um caso real estes limites se encontram no infinito, não estando o campo magnético existente na peça circunscrito a um espaço limitado. Assim, torna-se necessária a introdução de Condições de Contorno, que condicionam os campos na interface entre diferentes meios e nos limites do domínio a se aproximarem do comportamento real. Estas condições podem ser de dois tipos [1] [13]:

(a) Condições de Dirichlet:

Em toda a fronteira Γ_1 o potencial vetor magnético é imposto como condição de contorno. O potencial vetor magnético A é conhecido, fixo e constante, igual à A_o .

$$\frac{\partial A}{\partial \Gamma_1} = 0 \quad (1.28)$$

(b) Condições de Neumann:

Não é conhecido o potencial vetor magnético, mas sim o fluxo através da fronteira Γ_2 . Em toda esta fronteira temos:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial n_{\Gamma_2}} = q_0 \quad (1.29)$$

onde:

- \vec{n}_{Γ_2} - vetor unitário na direção normal à fronteira Γ_2 .

Geralmente em problemas eletromagnéticos q_0 é nulo.

Quando o problema apresenta simetria, o domínio de cálculo pode ser reduzido, através da aplicação conscienciosa das condições de Dirichlet e Neumann. Desta forma, apenas uma parte do dispositivo precisa ser definido para que todo ele seja caracterizado.

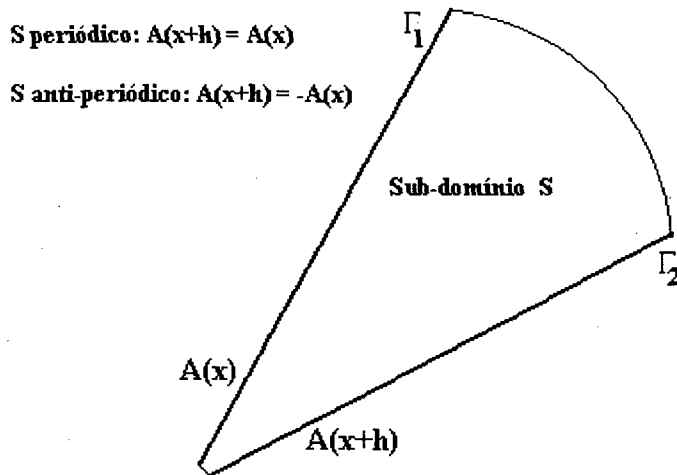


Figura 1.2 – Representação de domínios (anti) periódicos.

Outros problemas podem apresentar periodicidade ou anti-periodicidade, ou seja, podem se caracterizar pela repetição da geometria de um sub-domínio S em todo seu domínio de estudo. Também estes casos podem ter o domínio de cálculo reduzido, assumindo a geometria de um desses sub-domínios [13]. A condição de periodicidade impõe às fronteiras que delimitam a porção periódica potenciais com valores iguais. Já a condição de anti-periodicidade impõem potenciais simétricos, ou seja, iguais em módulo

porém de sinais contrários, às fronteiras que delimitam a porção anti-periódica. Basta a definição desta porção elementar, periódica ou anti-periódica, para que todo o domínio real seja caracterizado.

Além das fronteiras impostas pela delimitação do domínio, outras, internas a ele, estão presentes. São as interfaces de separação entre meios diferentes, presentes na estrutura eletromagnética e/ou no espaço onde ela está inserida.

Atribuindo os sub-índices 1 e 2 para diferenciarmos os campos presentes em dois meios vizinhos, devemos garantir [1] [13]:

$$\vec{n} \cdot \vec{B}_1 = \vec{n} \cdot \vec{B}_2 \quad (1.30)$$

$$\vec{n} \times \vec{H}_1 = \vec{n} \times \vec{H}_2 \quad (1.31)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{J}_1 = \vec{n} \cdot \vec{J}_2 \quad (1.32)$$

$$\vec{n} \times \vec{E}_1 = \vec{n} \times \vec{E}_2 \quad (1.33)$$

Se não há correntes superficiais no limite de separação dos dois meios, as componentes tangenciais do campo magnético se conservam. Considerando a hipótese de um dos meios comportar ímãs permanentes, por exemplo o meio 2, podemos obter, através da equação (1.12):

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{1}{\mu_o} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 + \frac{1}{\mu_o} B_{ot} \quad (1.34)$$

Garantindo a continuidade da componente normal da indução magnética, temos:

$$\left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_1 = \left(\frac{\partial A}{\partial t} \right)_2 \quad (1.35)$$

onde:

- t - vetor unitário tangencial à fronteira.

Se não existem ímãs permanentes nos meios em contato, a equação (1.34) pode ser simplificada, sendo escrita na forma:

$$\left(\frac{1}{\mu_1} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \right)_1 = \left(\frac{1}{\mu_2} \cdot \frac{\partial A}{\partial n} \right)_2 \quad (1.36)$$

permanecendo a equação (1.35) inalterada.

1.5. Equacionamento dos Condutores

Os condutores presentes no domínio de cálculo podem ser classificados de acordo com dois tipos diferentes [13]. Esta classificação leva em consideração a seção dos condutores e a frequência dos fenômenos presentes. São eles:

(a) Condutores Maciços ou Espessos:

Os condutores assim denominados possuem dimensões suficientemente grandes em relação às frequências dos fenômenos, sendo considerada a distribuição irregular da corrente elétrica através de sua seção transversal devido ao efeito pelicular.

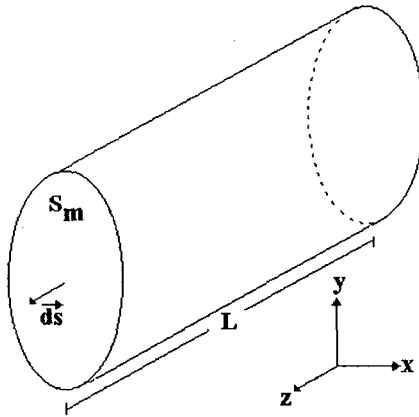


Figura 1.3 – Condutor espesso ou maciço.

A força eletromotriz em um condutor maciço é definida pela equação:

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.37)$$

onde:

- U_m - diferença de potencial entre os extremos do condutor [V];

- R_m - resistência do condutor, em corrente contínua [Ω];
- I_m - corrente elétrica no condutor [A];
- S_m - seção transversal do condutor [m^2].

Através de (1.37) podemos verificar que a corrente total que atravessa o condutor pode ser separada em duas parcelas: a primeira, uniformemente distribuída ao longo da seção e a segunda, relativa às correntes induzidas no condutor.

(b) Condutores Finos ou Multifilamentares:

Os condutores assim denominados apresentam dimensões reduzidas, sendo a corrente elétrica que os atravessa considerada uniformemente distribuída ao longo de sua seção transversal. São formados por N_{co} condutores conectados em série, todos com seção suficientemente pequena para evitar o efeito pelicular, constituindo as espiras de uma bobina.

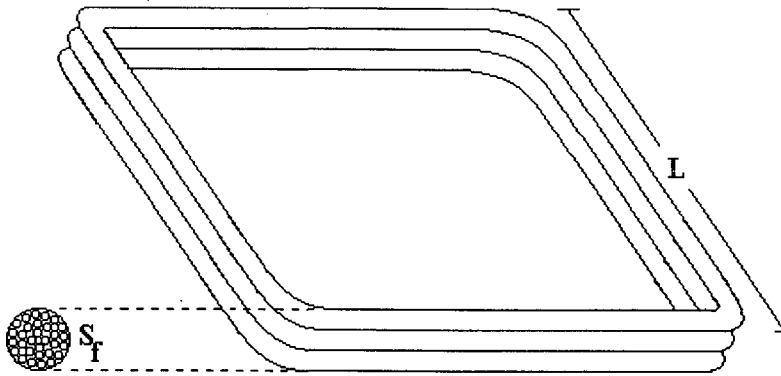


Figura 1.4 – Condutores finos ou multifilamentares.

A força eletromotriz no conjunto destes N_{co} condutores finos é definida pela equação:

$$U_f = R_f I_f + N_{co} \frac{L}{S_f} \iint_{S_f} \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.38)$$

onde:

- U_f - diferença de potencial no conjunto dos N_{co} condutores finos [V];

- R_f - resistência total dos N_{co} condutores finos [Ω];
- I_f - corrente elétrica [A];
- N_{co} - número de condutores finos;
- L - comprimento do condutor [m];
- S_f - seção do conjunto dos N_{co} condutores finos [m^2].

1.6. Equação Global da Estrutura Eletromagnética

O método de cálculo abordado neste trabalho considera a presença de imãs permanentes, de condutores maciços e de condutores finos na estrutura eletromagnética.

Desta forma, o comportamento dos campos presentes na estrutura eletromagnética pode ser estudado com o auxílio do sistema de equações a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{I_f}{S_f / N_{co}} + \sigma \frac{U_m}{L} + v_o \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v_o \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} = 0 \quad (1.39a)$$

$$U_f = R_f I_f + R_f \iint_{S_f} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds + \ell \frac{dI_f}{dt} \quad (1.39b)$$

$$U_m = R_m I_m + R_m \iint_{S_m} \sigma \frac{\partial A}{\partial t} ds \quad (1.39c)$$

onde:

- ℓ - indutância de cabeça de bobina.

À equação (1.39b) foi acrescentado um termo que representa a indutância de cabeça de bobina presente nos enrolamentos da estrutura. Este termo é aqui adicionado porque não é possível considerar sua presença quando a modelagem do dispositivo é feita em duas dimensões [13].

Dispositivos eletromagnéticos reais apresentam uma geometria complicada, não sendo possível a resolução analítica do sistema. Para solucionar este problema, a resolução destas equações é feita com o auxílio de métodos numéricos. Neste trabalho, o método de

elementos finitos será utilizado para a discretização do domínio e o Método de Resíduos Ponderados, particularmente o Método de Galerkin, será utilizado na formulação numérica do problema.

1.7. Método de Elementos Finitos

Na solução por elementos finitos o domínio de estudo deve ser subdividido ou discretizado [1]. Em aplicações 2D, a superfície que representa este domínio é dividida em pequenas regiões, sendo cada uma delas denominada um “elemento finito”. Os pontos que definem o elemento são denominados “nós” ou “graus de liberdade”. Os nós que delimitam os elementos recebem uma numeração global ou real, única e distinta em cada um dos nós da malha, e uma numeração local ou interna. A numeração local é utilizada para realizar as operações algébricas sobre o elemento n , resultando em um desenvolvimento genérico que se aplicará a cada elemento, independentemente de sua numeração real dentro da malha.

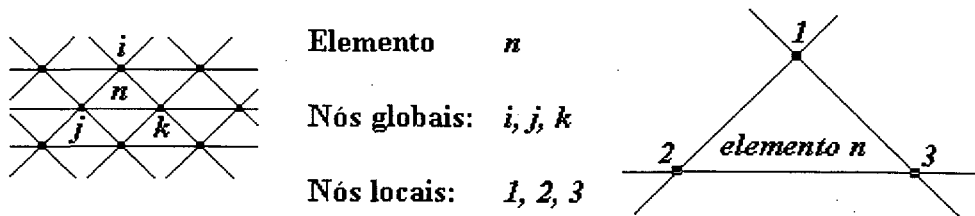


Figura 1.5 – Elemento finito isoparamétrico triangular de primeira ordem.

Neste trabalho são utilizados elementos finitos isoparamétricos triangulares de primeira ordem, ou seja, estes elementos são definidos pelos três nós localizados nos vértices do triângulo e o potencial vetor magnético é definido por uma função linear da posição dentro do elemento, denominada Função de Forma ou de Interpolação.

1.7.1. Aplicação do Método Residual

A solução obtida utilizando-se o método de elementos finitos, A , é uma aproximação e difere da solução exata, A_e , que seria obtida através da resolução analítica do problema. Quando substituirmos a solução obtida através deste método numérico na equação que define o problema (1.39a), ela gera um resíduo, \mathfrak{R} [1]:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) - \sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{I_f}{S_f / N_{co}} + \sigma \frac{U_m}{L} + v_o \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v_o \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} = \mathfrak{R} \quad (1.40)$$

Para estabelecermos um procedimento numérico, forçaremos \mathfrak{R} a zero utilizando a operação:

$$\langle W, \mathfrak{R} \rangle = \int_{\Omega} W \mathfrak{R} d\Omega = 0 \quad (1.41)$$

onde:

- W - função de ponderação;
- Ω - domínio no qual a condição é aplicada.

Segundo a escolha da Função de Ponderação diferentes variantes do método de elementos finitos podem aparecer.

Neste caso, a equação (1.39a) ficará:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} W \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] + \left[-\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{I_f}{S_f / N_{co}} + \sigma \frac{U_m}{L} \right] + \right. \\ \left. + \left[v_o \frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - v_o \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \right] \right\} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.42)$$

Os termos agrupados entre colchetes se referem a partes distintas da estrutura eletromagnética e serão analisados separadamente. O primeiro termo se refere a definição do potencial vetor elétrico, dada em (1.16), o segundo, aos condutores, e o terceiro, aos ímãs permanentes presentes no domínio [13].

1º) Referente à definição de \vec{A} :

$$\iint_{\Omega} W \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(v \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v \frac{\partial A}{\partial y} \right) \right] d\Omega \quad (1.43)$$

Aplicando a identidade vetorial:

$$U \vec{\nabla} \cdot \vec{X} = \vec{\nabla} \cdot U \vec{X} - \vec{X} \cdot \vec{\nabla} U \quad (1.44)$$

e o teorema da divergência, obtemos:

$$\oint_{\Gamma(\Omega)} W \nabla \text{grad} A \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \nabla \text{grad} A \cdot \text{grad} W d\Omega \quad (1.45)$$

onde:

- $\Gamma(\Omega)$ - superfície fechada que delimita o domínio Ω .

O primeiro termo da equação (1.45) corresponde à condição de Neumann não homogênea.

2º) Termo referente aos condutores:

$$\iint_{\Omega} W \frac{I_f}{S_f/N_{co}} d\Omega - \iint_{\Omega} W \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega - \iint_{\Omega} W \sigma \frac{U_m}{L} d\Omega \quad (1.46)$$

3º) Termo referente aos ímãs permanentes:

$$\iint_{\Omega} W v_o \left(\frac{\partial B_{oy}}{\partial x} - \frac{\partial B_{ox}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (1.47)$$

Aplicando a identidade vetorial dada em (1.44) e a divergência, temos:

$$\oint_{\Gamma(\Omega)} W v_o B_{ot} d\Gamma - \iint_{\Omega} v_o \left(B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\Omega \quad (1.48)$$

onde:

- B_{ot} - componente tangencial de \vec{B}_o .

Agrupando as equações obtidas em (1.46), (1.47) e (1.48) teremos novamente a equação geral do problema.

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma(\Omega)} W \nabla \text{grad} A \cdot \vec{n} d\Gamma - \iint_{\Omega} \nabla \text{grad} A \cdot \text{grad} W d\Omega + \iint_{\Omega} W \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} W \frac{I_f}{S_f/N_{co}} d\Omega - \\ & + \iint_{\Omega} W \sigma \frac{U_m}{L} d\Omega + \oint_{\Gamma(\Omega)} W v_o B_{ot} d\Gamma - \iint_{\Omega} v_o \left(B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.49)$$

O primeiro termo do lado direito de (1.49) está relacionado com as condições de contorno do problema, sendo nulo nas fronteiras que receberam condições de Dirichlet e também nas que apresentam condições de Neumann. É importante ressaltar que, sendo a equação (1.49) igual a zero, a soma das integrais em $\Gamma(\Omega)$ e a soma das integrais em Ω no primeiro membro da equação também devem ser nulas. Assim, podemos verificar que, tanto nas fronteiras externas quanto nas internas ao domínio, onde as integrais em $\Gamma(\Omega)$ se aplicam, teremos sempre esta condição satisfeita [13]. A equação (1.49) pode ser então simplificada, sendo reescrita na forma:

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega} v \text{grad} A \cdot \text{grad} W d\Omega + \iint_{\Omega} W \sigma \frac{\partial A}{\partial t} d\Omega + \iint_{\Omega} W \frac{I_f}{S_f / N_{co}} d\Omega + \\ + \iint_{\Omega} W \sigma \frac{U_m}{L} d\Omega - \iint_{\Omega} v_o \left(B_{oy} \frac{\partial W}{\partial x} - B_{ox} \frac{\partial W}{\partial y} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (1.50)$$

A equação (1.50) é geralmente denominada como uma “forma fraca” de formulação [11]. A origem desta terminologia está no fato de que na equação (1.42) existem termos de derivadas de segunda ordem, enquanto que na equação (1.50) existem apenas derivadas de primeira ordem, o que torna a sua manipulação, em termos de técnicas numéricas, muito mais fácil.

1.7.2. Método de Galerkin

Agora torna-se necessária a aplicação do conceito de discretização do domínio ao método residual. Para um domínio discretizado Ω teremos a equação (1.41) dada por:

$$\sum_{k=1}^K \int_{\Omega_k} W_k \mathfrak{R}_k d\Omega = 0 \quad (1.51)$$

onde:

- W_k - função de ponderação para o nó k ;
- K - número de nós do domínio;
- Ω_k - parcela de domínio no qual o nó k está inserido.

A equação (1.51) corresponde a K equações, para K valores de potencial desconhecidos em K nós presentes na resolução do problema.

O potencial $A(x, y)$ é representado pela equação:

$$A(x, y) = \sum_k A_k N_k \quad (1.52)$$

onde:

- A_k - valor do potencial no nó k ;
- N_k - função de forma ou interpolação.

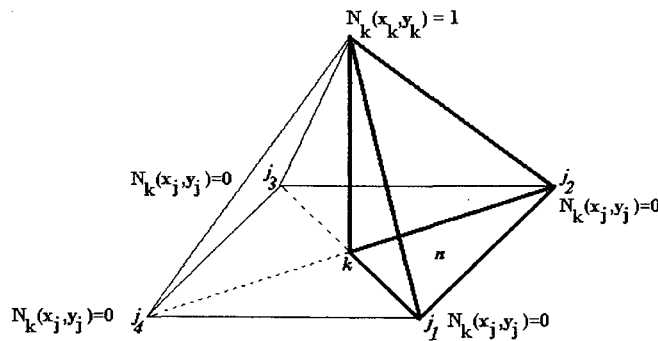


Figura 1.6 – Função de forma ou interpolação.

N_k é uma função associada ao nó k , tal que quando $x = x_k$ e $y = y_k$ teremos $A(x_k, y_k) = A_k$. Esta função deve ser $N_k(x_k, y_k) = 1$. Todas as outras $K-1$ funções devem valer $N_j(x_k, y_k) = 0$ para $j \neq k$. Teremos assim uma função que atua fortemente no nó onde é definida, quando se iguala a um, e que decresce linearmente ao se afastar deste nó em direção aos nós vizinhos, sendo zero sobre estes nós.

O Método de Galerkin consiste em adotar, tanto para função de forma quanto para função de ponderação, uma mesma função, que será a descrita acima. Esta escolha conduz a um tipo particular de método de resíduo ponderado e permite realizarmos a integração por elemento, ao invés de a realizarmos por nó, como sugere a equação (1.51) [1].

1.8. Sistema de Equações do Dispositivo Eletromagnético

De acordo com as condições expressas anteriormente, podemos escrever o sistema de equações obtido em (1.50) na forma matricial abaixo [13]:

$$MA + N \frac{d}{dt} A - PI_f - P' U_m = D \quad (1.53a)$$

$$Q \frac{d}{dt} A + R I_m = U_m \quad (1.53b)$$

$$Q \frac{d}{dt} A + R I_f + L \frac{d}{dt} I_f = U_f \quad (1.53c)$$

onde:

- A - potencial vetor magnético nos nós da malha de discretização;
- I_f - correntes nos condutores finos ou multifilamentares presentes na estrutura eletromagnética;
- U_f - tensão nos terminais dos enrolamentos de condutores finos;
- I_m - correntes nos condutores maciços ou espessos presentes na estrutura eletromagnética;
- U_m - tensão nos terminais dos condutores maciços;
- R - matriz de resistências, em corrente contínua, dos enrolamentos de condutores finos;
- L - matriz de indutâncias de cabeça de bobinas de condutores finos;
- R' - matriz de resistências, em corrente contínua, dos condutores maciços.

As demais matrizes são obtidas durante o processo de montagem das matrizes elementares devido aos métodos de Elementos Finitos e de Galerkin.

- M - matriz relacionada à permeabilidade:

$$m_{ij} = \iint_{\Omega_e} \nu \text{grad} N_i \cdot \text{grad} N_j d\Omega \quad (1.54)$$

- N - matriz relacionada à condutividade:

$$n_{ij} = \iint_{\Omega_e} \sigma N_i N_j d\Omega \quad (1.55)$$

- P - matriz que relaciona a corrente imposta no elemento aos nós que o delimita:

A matriz elementar p_{ij} será nula se o elemento Ω_e não pertencer à bobina de condutores finos. Caso ele pertença à bobina j , sua contribuição será avaliada como dado abaixo:

$$p_{ij} = \iint_{\Omega_e} \frac{N_{coj}}{S_{fj}} N_i d\Omega \quad (1.56)$$

- P' - matriz que relaciona a corrente induzida no elemento aos nós que o delimita:

Analogamente, p'_{ij} será não nula somente quando o elemento Ω_e pertencer ao condutor maciço j , sendo dada por:

$$p'_{ij} = \iint_{\Omega_e} \frac{\sigma_j}{L} N_i d\Omega \quad (1.57)$$

- D - vetor dos imãs permanentes:

$$d_i = \iint_{\Omega_e} v [\text{grad} N_i \times \vec{B}_o] \cdot \vec{k} d\Omega \quad (1.58)$$

- Q e Q' - matrizes de enlace de fluxo nas bobinas de condutores finos e maciços, respectivamente:

Também as matrizes elementares q_{ij} e q'_{ij} somente serão não nulas caso o elemento Ω_e pertença, respectivamente, à bobina i e ao condutor maciço i e iguais a:

$$q_{ij} = \iint_{\Omega_e} \frac{N_{coi} L}{S_{fi}} N_j d\Omega \quad (1.59)$$

$$q_{ij} = \iint_{\Omega_e} R_{mi} \sigma_i N_j d\Omega \quad (1.60)$$

Neste trabalho os condutores maciços são considerados conectados entre si, constituindo esta ligação um curto-circuito perfeito ($U_m = 0$). Apenas os condutores finos são considerados alimentados por circuitos elétricos externos [13]. Estas considerações levam à simplificação do sistema de equações obtido em (1.53), que toma a forma final:

$$MA + N \frac{d}{dt} A - PI = D \quad (1.61a)$$

$$Q \frac{d}{dt} A + RI + L \frac{d}{dt} I = U \quad (1.61b)$$

onde:

- I - vetor das correntes nas bobinas do dispositivo eletromagnético alimentado por circuito elétrico externo.

1.9. Conclusão

Neste capítulo foram apresentadas as equações básicas que descrevem os fenômenos eletromagnéticos, as Equações de Maxwell e suas Relações Complementares. A partir deste conjunto de equações particularizações foram admitidas para os casos em eletrotécnica [1]. Considerações foram feitas sobre os diferentes meios presentes na estrutura e sobre sua representação em duas dimensões, chegando assim às equações gerais que descrevem o fenômeno magnetodinâmico [13].

Foi também abordado o método numérico escolhido para resolução dessas equações, Método de Elementos Finitos. Para concluirmos a discretização do problema adotamos o método de Galerkin como Método de Resíduos Ponderados, chegando ao sistema final (1.61), que é o sistema implementado.

Capítulo 2: Estudo Topológico de Circuitos Elétricos

2.1. Introdução

Neste capítulo é apresentada uma breve revisão sobre o estudo topológico de circuitos elétricos. Este estudo tem como base a Teoria dos Grafos Lineares e sua aplicação é particularizada à teoria de circuitos elétricos [5] [15].

A partir dos dados de entrada dos elementos do circuito é possível determinar sua árvore e, conseqüentemente, determinar seus elementos ramo e elo.

Definida uma árvore do circuito, podemos aplicar as Leis de Kirchhoff das Malhas e dos Nós para relacionarmos os ramos e os elos do circuito. Esta relação é feita utilizando-se a matriz denominada Matriz de Cortes Fundamentais, K_2 .

O equacionamento automático dos circuitos está diretamente ligado à determinação de K_2 .

2.2. Topologia dos Circuitos

As características de qualquer circuito elétrico dependem dos elementos usados e de como estes elementos estão conectados entre si [15]. A Topologia dos Circuitos (ou Teoria dos Grafos Lineares) trata somente da maneira como os elementos estão interligados e não da natureza dos próprios elementos. Um grande número de propriedades úteis pode ser deduzido de tal estudo e estas propriedades podem ser aplicadas em teoria de circuitos.

Aqui são apresentadas algumas definições básicas sobre esta teoria, utilizadas durante o desenvolvimento deste capítulo, sendo necessárias para seu entendimento [15].

Em qualquer circuito elétrico podemos identificar o número de elementos, b , e o número de nós, n , presentes. Na figura 2.1 está representado um circuito com 5 elementos e 4 nós ($b = 5$, $n = 4$). Tomaremos este circuito como exemplo para as definições que virão a seguir.

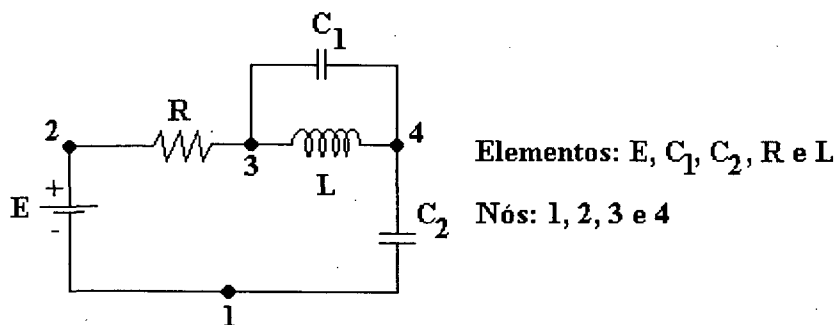


Figura 2.1 – Circuito elétrico.

Um grafo linear, ou simplesmente um grafo, é formado a partir do circuito elétrico original, desprezando-se a natureza dos elementos presentes, substituindo-os por simples linhas, denominadas braços, e representando os nós por pontos. O grafo do circuito acima é mostrado na figura 2.2.

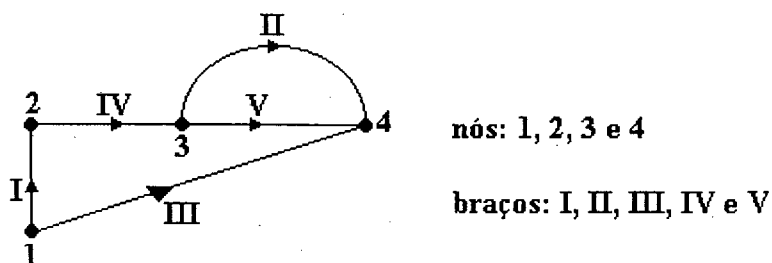


Figura 2.2 – Grafo orientado.

Um grafo orientado tem uma seta de orientação associada a cada braço. Esta orientação pode ser escolhida utilizando-se as setas de corrente ou tensão do circuito original. Neste trabalho será adotado o sentido positivo da corrente para orientação dos braços que correspondem a dispositivos semicondutores. O sentido dessa orientação fica assim amarrado ao único sentido no qual o dispositivo permite que se estabeleça uma circulação de corrente. Da mesma forma, o sentido dos braços vinculados a elementos geradores, fontes de tensão e corrente, será aquele no qual a corrente é injetada no circuito.

Um grafo conectado é aquele onde existe um caminho entre quaisquer dois nós. Um grafo não conectado consiste de duas ou mais partes isoladas, correspondendo a circuitos também isolados, podendo estes serem analisados separadamente. As figuras em 2.3(a) e 2.3(b) são exemplos de grafos conectado e não conectado, respectivamente.

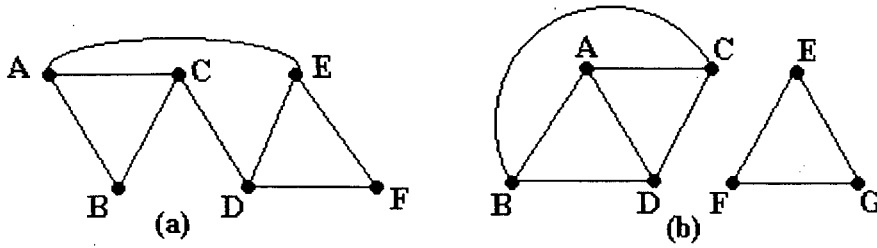


Figura 2.3 – (a) Grafo conectado; (b) Grafo não conectado.

Um laço de um grafo é um conjunto de braços que formam um único caminho fechado. Cada nó em um laço deve ter exatamente dois braços, pertencentes ao laço, ligados a ele.

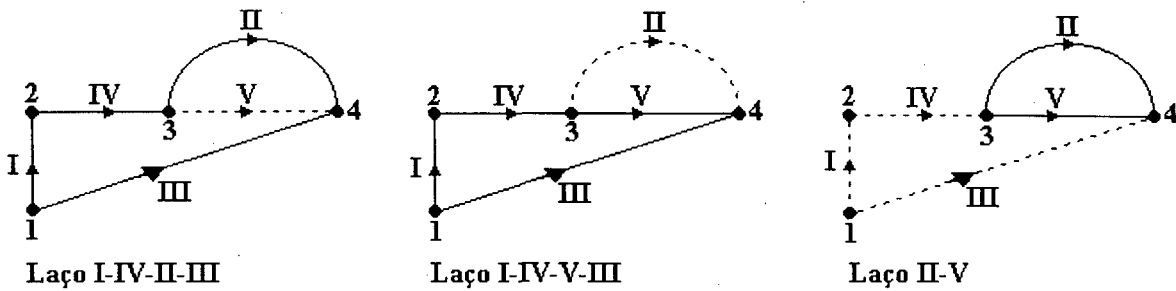


Figura 2.4 – Possíveis laços da figura 2.2.

Uma árvore de um grafo é um subgrafo conectado que liga todos os nós mas não contém nenhum laço. Assim, quando todos os n nós tiverem sido ligados, a árvore conterá exatamente $(n - 1)$ braços.

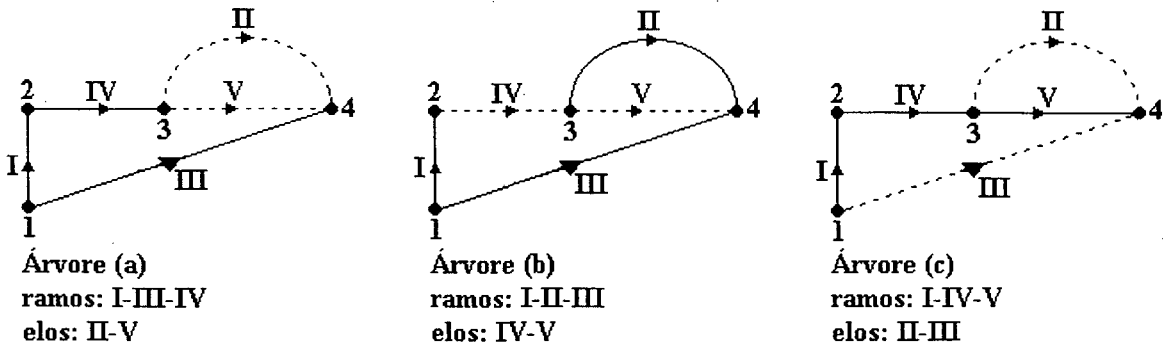


Figura 2.5 – Algumas possíveis árvores da figura 2.2.

Na escolha de uma árvore, os braços de um grafo podem ser divididos em duas categorias mutuamente exclusivas: os ramos, r , são os $(n-1)$ braços que pertencem à árvore e os elos, e , braços que não pertencem à árvore. O número de elos presentes em um grafo pode ser obtido através da equação:

$$e = b - n + 1 \quad (2.1)$$

onde:

- e - número de elos do grafo;
- b - número de braços;
- n - número de nós.

Um conjunto de elos pode conter ou não um ou mais laços.

Um corte é um conjunto de braços cuja remoção divide o grafo original em dois subgrafos não conexos. Já um Corte Fundamental é aquele que contém, dentro deste conjunto de braços, apenas um único ramo da árvore considerada. Assim, podemos afirmar que o número de cortes fundamentais, N_{CF} , é igual ao número de ramos do grafo, e atribuir a cada corte fundamental a orientação do ramo que o caracteriza.

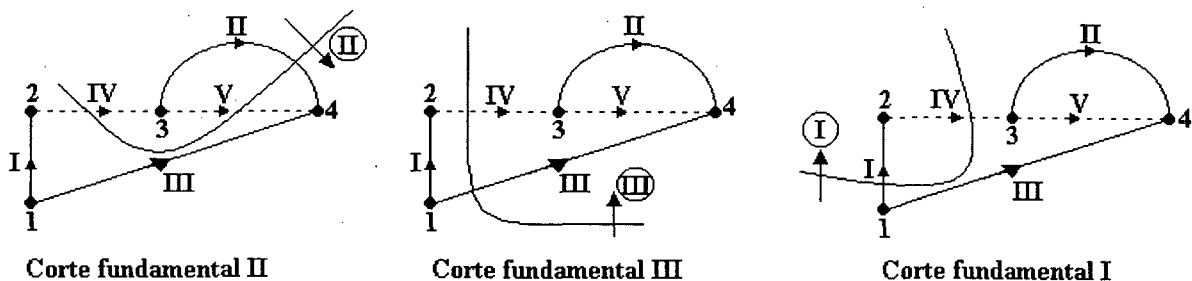


Figura 2.6 – Cortes fundamentais da figura 2.5(b).

Analogamente, podemos definir um Laço Fundamental como aquele que contém apenas um único elo dentre os braços que o compõe. Deste forma, teremos o número de laços fundamentais, N_{LF} , igual ao número de elos do grafo e possuindo, cada um, a orientação do elo que o caracteriza.

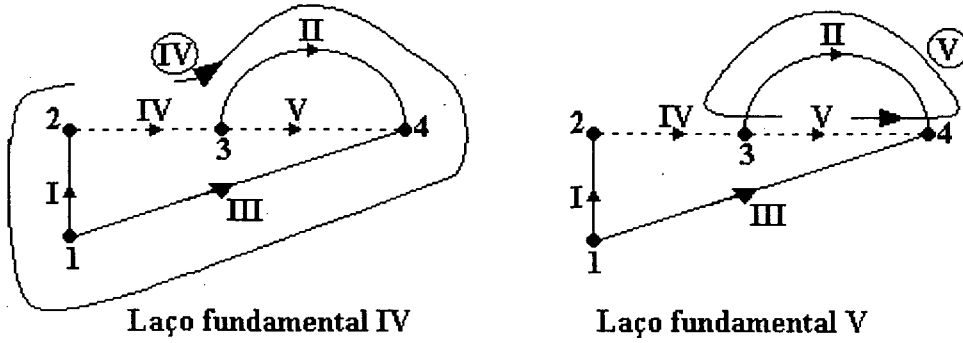


Figura 2.7 – Laços fundamentais da figura 2.5(b).

Com o auxílio das duas últimas definições podemos obter duas matrizes essenciais à formulação das equações do circuito: a matriz de cortes fundamentais, K_2 , e a matriz de elos fundamentais, B_1 [5] [15].

2.2.1. Matriz de Cortes Fundamentais: K_2

A matriz de cortes fundamentais é uma matriz esparsa. Seus elementos k_{ij} não nulos obedecem aos critérios abaixo:

- $k_{ij} = 1$ - se o braço j pertence ao corte i , tendo a mesma orientação deste;
- $k_{ij} = -1$ - se o braço j pertence ao corte i , tendo orientação contrária a ele.

Sua montagem é feita através da varredura dos N_{CF} cortes fundamentais e dos b braços do grafo. Assim, sua dimensão final é igual a:

$$\dim(K) = (n - 1) \times (b) \quad (2.2)$$

Podemos ordenar as colunas de K , colocando primeiro os ramos e depois os elos do circuito. Esta ordenação nos permite particionar esta matriz em duas sub-matrizes, K_1 e K_2 , como a seguir:

$$K = [K_1 : K_2] \quad (2.3)$$

A submatriz K_1 é igual à matriz identidade:

$$K_1 = I \quad (2.4)$$

e, de acordo com a Lei dos Nós de Kirchhoff, o somatório das correntes nos braços de um corte é igual a zero:

$$K[i] = 0 \quad (2.5)$$

então, teremos:

$$[K_1 : K_2] \begin{bmatrix} i_r \\ \vdots \\ i_e \end{bmatrix} = 0 \quad (2.6)$$

que podemos escrever como:

$$[i_r] = -K_2[i_e] \quad (2.7)$$

onde:

- $[i_r]$ - vetor das correntes nos ramos do circuito;
- $[i_e]$ - vetor das correntes nos elos do circuito.

Para o exemplo ilustrado na figura 2.6, teremos:

$$K = [K_1 : K_2] = \begin{matrix} \text{ramos} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \vdots & \text{IV} & \text{V} & \text{elos} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 1 & 0 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \text{corte I} \\ \text{corte II} \\ \text{corte III} \end{array} \right. \end{matrix} \quad (2.8a)$$

Destacando a matriz de cortes fundamentais:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.8b)$$

Assim, podemos relacionar as correntes nos ramos com as correntes nos elos do circuito através de:

$$\begin{bmatrix} i_{r1} \\ i_{r2} \\ i_{r3} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e4} \\ i_{e5} \end{bmatrix} \quad (2.8c)$$

2.2.2. Matriz de Laços Fundamentais: B_1

Semelhante à matriz de cortes fundamentais, a matriz de laços fundamentais também é uma matriz esparsa. Seus elementos b_{ij} não nulos obedecem aos critérios:

- $b_{ij} = 1$ - se o braço j pertence ao laço i , tendo a mesma orientação deste;
- $b_{ij} = -1$ - se o braço j pertence ao laço i , tendo orientação contrária a ele.

Sua dimensão final é:

$$\dim(B) = (b - n + 1) \times (b) \quad (2.9)$$

Novamente, ordenamos as colunas de B , colocando primeiro os ramos e depois os elos do circuito, e a particionamos em duas sub-matrizes, B_1 e B_2 , como a seguir:

$$B = [B_1 : B_2] \quad (2.10)$$

A submatriz B_2 é igual à matriz identidade:

$$B_2 = I \quad (2.11)$$

e, de acordo com a Lei das Malhas de Kirchhoff, o somatório das tensões nos braços de um laço é igual a zero:

$$B[v] = 0 \quad (2.12)$$

então, teremos:

$$[B_1 : B_2] \begin{bmatrix} v_r \\ \dots \\ v_e \end{bmatrix} = 0 \quad (2.13)$$

que podemos escrever como:

$$[v_e] = -B_1[v_r] \quad (2.14)$$

onde:

- $[v_r]$ - vetor das quedas de tensão nos ramos do circuito;
- $[v_e]$ - vetor das quedas de tensão nos elos do circuito.

Para o exemplo ilustrado na figura 2.7, teremos:

$$B = [B_1 : B_2] = \begin{matrix} \text{ramos} & \text{I} & \text{II} & \text{III} & \vdots & \text{IV} & \text{V} & \text{elos} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 0 & 1 \end{bmatrix} & \left\{ \begin{array}{l} \text{laço IV} \\ \text{laço V} \end{array} \right. \end{matrix} \quad (2.15a)$$

Destacando a matriz de laços fundamentais:

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.15b)$$

Assim, podemos relacionar as quedas de tensão nos elos e ramos do circuito:

$$\begin{bmatrix} v_{e4} \\ v_{e5} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{r1} \\ v_{r2} \\ v_{r3} \end{bmatrix} \quad (2.15c)$$

2.2.3. Relação entre K_2 e B_1

A matriz de cortes fundamentais, K_2 , expressa a relação existente entre a orientação dos ramos que caracterizam os cortes e os elos pertencentes a eles. Do mesmo modo, a matriz de laços fundamentais, B_1 , expressa a relação entre a orientação dos elos que caracterizam os laços e os ramos pertencentes a estes laços [15].

As matrizes K_2 e B_1 estão interrelacionadas, para chegarmos a esta interrelação utilizaremos um exemplo.

A figura 2.8 mostra os cortes fundamentais I e III e o laço fundamental IV da árvore (b) da figura 2.5. Esta árvore representa uma dentre diversas possibilidades que poderiam ser adotadas.

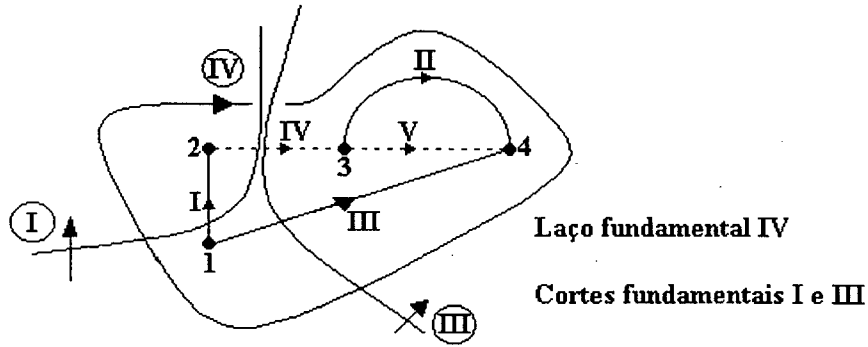


Figura 2.8 – Relação entre as matrizes K_2 e B_1 .

Três casos podem ser apresentados:

- (a) O ramo I tem a mesma orientação do laço fundamental IV, portanto o termo da matriz $b_{41} = 1$. A orientação do elo IV é contrária à orientação do corte fundamental I, então o termo $k_{14} = -1$;
- (b) O ramo III tem orientação contrária a do laço fundamental IV, portanto o termo da matriz $b_{43} = -1$. A orientação do elo IV é a igual a do corte fundamental III, então o termo $k_{34} = 1$;
- (c) Todo ramo i que não pertence ao laço fundamental IV gera um termo $b_{4i} = 0$. Analogamente, se o corte i não corta o elo IV, o termo $k_{i4} = 0$.

Fica claro, então, que os elementos b_{ij} e k_{ji} são simétricos. Desta forma, a relação que liga as matrizes de cortes e de laços fundamentais é:

$$K_2 = -B_1' \quad (2.16)$$

Podemos verificar a relação (2.16) com o auxílio das equações (2.8c) e (2.15c), que são as matrizes K_2 e B_1 da árvore (b) representada na figura 2.5. Estas matrizes estão reproduzidas a seguir:

$$K_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.17)$$

O equacionamento automático dos circuitos está diretamente ligado à determinação de K_2 ou B_1 . Essas matrizes são facilmente obtidas utilizando-se a matriz de incidência do circuito e o algoritmo de Welsh, abordados a seguir.

2.3. Determinação Automática de K_2

2.3.1. Matriz de Incidência: F

A partir da declaração dos elementos de um circuito é possível montar sua matriz de incidência, F [5] [15]. Esta matriz carrega a informação dos nós a que estão conectados os terminais dos elementos presentes no circuito. Estes nós são comumente denominados nós *de* e *para*, dependendo da orientação do braço vinculado ao elemento que sai de um nó para outro.

A matriz F apresenta grande esparsidade. Ela pode ser obtida fazendo-se a varredura de cada um dos elementos do circuito, verificando seus nós de conexão. Desta forma, suas colunas correspondem aos elementos e suas linhas, aos nós do circuito, sendo sua dimensão final $(n \times b)$. Como os elementos utilizados possuem dois terminais, ou seja, são bipolos elétricos, em cada uma das colunas de F existem apenas dois termos não nulos, sendo estes dados por:

- $f_{ij} = 1$ - se o braço j sai do nó i ;
- $f_{ij} = -1$ - se o braço j chega ao nó i .

Aqui é considerada a natureza gerador ou receptor dos elementos do circuito. Em elementos geradores, fontes de tensão e corrente, a queda de tensão entre seus terminais ocorre no mesmo sentido da circulação de corrente enquanto que, em elementos receptores, resistores, capacitores, indutores, enrolamentos e interruptores, a queda de tensão e a corrente têm sentidos contrários (figura 2.9).

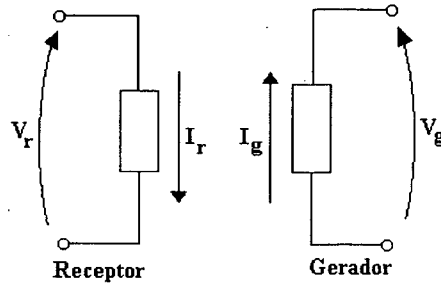


Figura 2.9 – Elementos gerador e receptor: convenção de sinais.

A distinção entre estes dois tipos de elemento é obtida invertendo-se os sinais dos termos das colunas de F que correspondem a elementos receptores.

Neste trabalho é adotado um critério para ordem de entrada dos elementos na montagem da matriz de incidência: primeiramente são lidos os nós de todas as fontes de tensão presentes no circuito. Em seguida são lidos os nós dos capacitores, dos elementos resistivos (interruptores e resistores), dos indutores, dos enrolamentos do dispositivo eletromagnético e, por último, os nós das fontes de corrente. Esta ordem de entrada deve ser rigorosamente observada devido a definição das variáveis de estado utilizadas no equacionamento do circuito e das variáveis utilizadas no acoplamento dos sistemas de equações. Este ponto será melhor esclarecido no próximo capítulo.

Após montada a matriz de incidência de um circuito, se torna bastante simples a conferência de suas ligações para verificação da presença de um circuito aberto. Basta proceder à leitura das linhas de F . Cada uma delas deve conter, pelo menos, dois elementos não nulos, que correspondem a dois dispositivos elétricos conectados àquele nó, correspondente àquela linha.

Abaixo está a matriz de incidência do circuito mostrado na figura 2.1. Nela estão observados o critério de entrada dos elementos e a convenção de sinais, expressos acima:

$$\begin{array}{ccccc} \text{elementos} & E & C_1 & C_2 & R & L \end{array} \tag{2.18}$$

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \text{nó 1} \\ \text{nó 2} \\ \text{nó 3} \\ \text{nó 4} \end{array} \right.$$

Partindo de F , podemos aplicar o algoritmo de Welsh para determinação da árvore do circuito, ou seja, identificar seus elementos ramo e elo, e de sua matriz de cortes fundamentais.

2.3.2. Algoritmo de Welsh

O Algoritmo de Welsh consiste de algumas etapas principais. Primeiramente são identificados os ramos e os elos do circuito, ficando assim definida a árvore que o representará. Em seguida é montada uma matriz de incidência alterada, F' , composta de duas submatrizes, F'_1 e F'_2 . F'_1 é montada com os elementos ramo do circuito e F'_2 , com os elementos elo. Com o auxílio destas duas matrizes obtemos a matriz de cortes fundamentais, K_2 [5].

Primeiramente, parte-se da leitura seqüencial dos n termos, correspondentes às n linhas, das b colunas da matriz de incidência. Em cada coluna j lida é procurado o primeiro termo não nulo. A linha i deste termo não nulo fica, a princípio, marcada, enquanto três verificações são feitas:

- 1°. Se a linha i , a qual pertence o elemento j não nulo, não aparece marcada em nenhuma das colunas anteriores, então todos os outros elementos não nulos desta coluna devem ser zerados, fazendo-se combinações lineares das linhas restantes com a linha i . O elemento correspondente a esta coluna da matriz F é considerado um ramo do circuito e a linha do termo não nulo permanece marcada;
- 2°. Se a linha i , a qual pertence o elemento j não nulo, aparece marcada anteriormente, procura-se o próximo termo não nulo e verifica-se se sua linha não aparece marcada. Repete-se a procura até que esta condição seja satisfeita. Então zera-se os demais termos desta coluna, o elemento correspondente à ela é considerado um ramo do circuito e a linha do termo não nulo é marcada;
- 3°. Se todos os elementos não nulos da coluna j pertencem a linhas que já foram marcadas anteriormente, então o elemento correspondente é considerado um elo do circuito, nada deve ser feito a esta coluna e nenhuma linha é marcada.

Finalizado este procedimento, estarão determinados quais são os ramos e os elos do circuito. Uma observação importante deve ser feita sobre a matriz final obtida, todos os termos de sua última linha são nulos. Isto porque, para um circuito com n nós, é necessário um sistema com $(n-1)$ equações linearmente independentes para descrevê-lo totalmente. Durante esta primeira etapa do algoritmo de Welsh, uma das linhas de F é naturalmente zerada, podendo ser descartada nas operações seguintes.

Utilizaremos a matriz de incidência obtida em (2.18) para exemplificar o processo descrito acima.

$$F = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Primeira coluna: $f_{11} \neq 0$

A fonte de tensão E será um ramo do circuito e a linha 1 ficará marcada. O termo f_{21} será zerado através da operação $L_2 = L_2 + L_1$.

$$\begin{bmatrix} (1) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (1) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

- Segunda coluna: $f_{32} \neq 0$

O capacitor C_1 será um ramo do circuito e a linha 3 ficará marcada. O termo f_{42} será zerado através da operação $L_4 = L_4 + L_3$.

$$\begin{bmatrix} (1) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (1) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

- Terceira coluna: $f_{23} \neq 0$

Primeiramente, tem-se o termo $f_{13} \neq 0$, porém este termo não pode ser considerado pois a linha 1 já se encontra marcada na primeira coluna. Prossegue a busca e o termo não nulo seguinte, f_{23} , é marcado. O capacitor C_2 será um ramo do circuito e a linha 2 ficará marcada. Os termos f_{13} e f_{43} serão zerados através das operações $L_1 = L_1 - L_2$ e $L_4 = L_4 + L_2$, respectivamente.

$$\begin{bmatrix} (1) & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1) & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} (1) & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (-1) & -1 & 0 \\ 0 & (-1) & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.19c)$$

- Os termos não nulos das colunas 4 e 5 pertencem a linhas que já foram marcadas anteriormente. Então, o resistor R e o indutor L serão elos do circuito. A última linha da matriz é toda nula e pode ser descartada.

Os elementos classificados como ramos no circuito foram a fonte de tensão, E , e os capacitores, C_1 e C_2 . O resistor, R , e o indutor, L , foram classificados como elos. Assim, temos a mesma árvore escolhida como exemplo na figura 2.5, árvore (b), que possui os cortes e laços fundamentais mostrados nas figuras 2.6 e 2.7, respectivamente.

Terminada esta primeira etapa, é montada uma matriz de incidência alterada, F' , composta por duas submatrizes, F'_1 e F'_2 . F'_1 é uma matriz quadrada, formada pelas $(n-1)$ colunas correspondentes aos elementos ramo do circuito, na ordem em que apareceram. F'_2 é formada pelas demais $(b-n+1)$ colunas, correspondentes aos elementos elo, também obedecendo a ordem de ocorrência.

$$F' = \begin{bmatrix} \underbrace{F'_1}_{(n-1) \text{ ramos}} & \underbrace{F'_2}_{(b-n+1) \text{ elos}} \end{bmatrix} \quad (n-1) \quad (2.20)$$

Podemos obter a matriz de cortes fundamentais, K_2 , através da operação:

$$K_2 = F_1'^t \cdot F'_2 \quad (2.21)$$

Prosseguiremos, agora, com a montagem das matrizes F'_1 e F'_2 , utilizando o exemplo desenvolvido em (2.19):

$$F' = [F'_1 : F'_2] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \vdots & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \vdots & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.22a)$$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{ramos}} \qquad \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{elos}}$
 $\qquad\qquad E \quad C_1 \quad C_2 \qquad\qquad R \quad L$

e, com o auxílio de (2.21), determinar a matriz de cortes fundamentais, K_2 :

$$K_2 = F'^t_1 \cdot F'_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.22b)$$

Podemos comparar a matriz obtida através do algoritmo de Welsh, em (2.22b), com aquela obtida observando-se os cortes fundamentais da figura 2.6, mostrada em (2.8b), pois ambas se referem a uma mesma árvore de um mesmo circuito. O sinal da primeira linha de K_2 em (2.22b) é o contrário de (2.8b) devido a diferenciação gerador/receptor adotada, que modifica a orientação dos braços vinculados aos elementos receptores.

2.4. Conclusão

Neste capítulo foi apresentada o estudo topológico de circuitos elétricos que permite a obtenção de sua Matriz de Cortes Fundamentais, K_2 . O equacionamento automático dos circuitos, assunto abordado no capítulo 3, está diretamente ligado à determinação de K_2 .

Capítulo 3: Acoplamento das Equações do Dispositivo Eletromagnético e do Circuito Externo de Alimentação

3.1. Introdução

Neste capítulo são apresentadas as equações que descrevem o circuito elétrico externo que alimenta o dispositivo eletromagnético e o método geral para o acoplamento destas equações com as equações de campos eletromagnéticos.

O equacionamento do circuito é realizado em variáveis de espaço de estados, a partir da declaração de sua topologia [3] [4] [5]. A matriz de cortes fundamentais é utilizada para determinação das variáveis do circuito.

Para que não ocorra dependência linear durante a montagem do sistema de equações do problema, comuns em casos trifásicos, é necessário garantir que todos os enrolamentos do dispositivo eletromagnético sejam elos do circuito. É adotada uma forma simples de verificação e mudança automática na natureza destes elementos, nos casos em que se torna necessário, para garantir que esta condição seja sempre satisfeita.

Os circuitos podem conter, dentre os diversos elementos que os compõem, dispositivos semicondutores operando como chaves ou interruptores. Estes dispositivos são modelados utilizando-se uma lógica binária, apresentando dois estados distintos. Nos instantes em que atuam como chaves fechadas, serão representados por elementos resistivos com baixa resistência elétrica. Quando atuam como chaves abertas, estes elementos assumem um alto valor de resistência [5].

Durante um intervalo de simulação, várias mudanças de estado podem ocorrer nos diversos interruptores do circuito. A combinação de estados presente em vários períodos define as diversas seqüências de operação do circuito, o que modifica constantemente suas características. A determinação destas mudanças, e consequentemente das diversas seqüências de operação, é feita de forma totalmente automática durante a simulação, não sendo necessário o conhecimento ‘a priori’ destas seqüências [5] [9].

As equações de campo das estruturas eletromagnéticas, descritas no capítulo 1, são combinadas diretamente com as equações de estado do circuito através das grandezas comuns aos dois sistemas de equações: as correntes nos enrolamentos do dispositivo

eletromagnético e as tensões entre seus terminais. Durante a simulação é realizada a resolução simultânea destas equações [5] [9] [13].

3.2. Associação das Equações de Campo e do Circuito de Alimentação

A associação das equações de campo do dispositivo eletromagnético com as equações do circuito externo de alimentação pode ser feita através das grandezas comuns aos dois sistemas: as correntes nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético e as tensões entre seus terminais [5] [13].

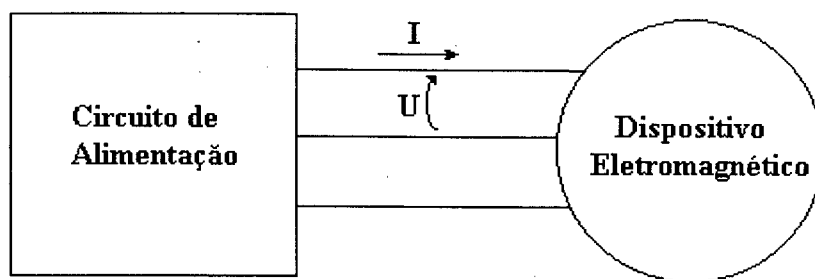


Figura 3.1 – Associação circuito elétrico / dispositivo eletromagnético.

Podemos escrever duas expressões da tensão nos terminais do dispositivo eletromagnético. A primeira, obtida no primeiro capítulo (equação 1.61b), vista do lado do dispositivo:

$$U = L \frac{d}{dt} I + RI + Q \frac{d}{dt} A \quad (3.1)$$

e a segunda vista do lado do circuito de alimentação:

$$U = G_4 X + G_5 E + G_6 I \quad (3.2)$$

onde:

- U - vetor das tensões nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético;
- I - vetor das correntes nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético;
- X - vetor das variáveis de estado do circuito elétrico;
- E - vetor das fontes independentes do circuito elétrico;

- G_4 - matriz que relaciona as tensões nos enrolamentos do dispositivo às variáveis de estado do circuito elétrico;
- G_5 - matriz que relaciona as tensões nos enrolamentos do dispositivo às fontes do circuito elétrico;
- G_6 - matriz que relaciona as tensões às correntes nos enrolamentos do dispositivo.

As variáveis de estado utilizadas no equacionamento do circuito elétrico são a tensão nos capacitores ramo, v_{cr} , e a corrente nos indutores elo, i_{le} , do circuito. Então, podemos escrever o vetor de variáveis de estado, X , como:

$$X = \begin{bmatrix} v_{cr} \\ i_{le} \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Podem estar presentes no circuito fontes independentes de tensão e corrente. As fontes de tensão devem ser vinculadas a ramos do circuito, v_{vr} , e as fontes de corrente, i_{je} , a elos. Esta vinculação é uma consequência natural da propriedade destes elementos de impor um valor conhecido de tensão ou corrente entre seus terminais. Desta forma, temos:

$$E = \begin{bmatrix} v_{vr} \\ i_{je} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Os enrolamentos do dispositivo eletromagnético devem corresponder a elos do circuito. Sendo esta condição sempre satisfeita, garantimos o número necessário de equações para descrever o problema e a independência linear entre elas. Assim, podemos escrever as correntes nos enrolamentos como:

$$I = [i_{ee}] \quad (3.5)$$

e as tensões:

$$U = [v_{ee}] \quad (3.6)$$

A prioridade descrita acima, de fontes de tensão e capacitores serem ramos e de indutores, enrolamentos e fontes de corrente serem elos, define a ordem de entrada dos

elementos do circuito em sua matriz de incidência. Isto porque, no algoritmo de Welsh, primeiro são definidos os ramos do circuito, sendo obedecida a ordem das colunas da matriz de incidência, ou seja, a ordem de entrada de seus elementos.

Nos casos em que enrolamentos são considerados ramo do circuito, o número de equações representadas em (3.2) se torna insuficiente, pois o sistema se torna linearmente dependente, ficando sem solução. Para resolver este problema, ao final do algoritmo de Welsh é acrescentada uma verificação da natureza dos enrolamentos, sendo colocado um resistor com um alto valor de resistência em paralelo com aqueles que forem ramos. Então, a matriz de incidência é novamente montada e durante a reformulação do circuito, feita pelo algoritmo de Welsh, este resistor se tornará um ramo do circuito e o enrolamento, um elo. Este procedimento não apresenta dificuldade em sua implementação, pois não cria novos nós no circuito original, não alterando drasticamente sua topologia, e praticamente não altera as características elétricas do circuito, devido ao alto valor de resistência do resistor utilizado.

Às equações (3.1) e (3.2) podem ser associadas outras duas. Primeiro a equação diferencial do circuito elétrico conectado ao dispositivo eletromagnético:

$$\frac{d}{dt}X = G_1X + G_2E + G_3I \quad (3.7)$$

onde:

- G_1 - matriz que relaciona as variáveis de estado do circuito as suas derivadas;
- G_2 - matriz que relaciona as fontes do circuito elétrico às derivadas de suas variáveis de estado;
- G_3 - matriz que relaciona as correntes nos enrolamentos do dispositivo às derivadas das variáveis de estado do circuito elétrico.

E também a equação (1.61a), obtida no primeiro capítulo, que descreve o comportamento do campo no dispositivo:

$$MA + N \frac{d}{dt}A - PI = D \quad (3.8)$$

As equações (3.1), (3.2), (3.7) e (3.8) formam um sistema geral de equações que descreve o comportamento de conjuntos dispositivo eletromagnético / circuito elétrico externo de alimentação [5] [9] [13]:

$$MA + N \frac{d}{dt} A - PI = D \quad (3.9a)$$

$$Q \frac{d}{dt} A + (R - G_6)I + L \frac{d}{dt} I - G_4 X = G_5 E \quad (3.9b)$$

$$\frac{d}{dt} X - G_1 X - G_3 I = G_2 E \quad (3.9c)$$

O sistema (3.9) é formado por equações diferenciais temporais. Em sua resolução passo a passo é utilizado o método de recorrência de Euler na discretização de suas derivadas. Desta forma, podemos reescrevê-lo, colocando-o sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} M + \frac{N}{\Delta t} & -P & 0 \\ \frac{Q}{\Delta t} & R + \frac{L}{\Delta t} - G_6 & -G_4 \\ 0 & -G_3 & \frac{1}{\Delta t} - G_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t) \\ I(t) \\ X(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N}{\Delta t} & 0 & 0 \\ \frac{Q}{\Delta t} & \frac{L}{\Delta t} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Delta t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A(t - \Delta t) \\ I(t - \Delta t) \\ X(t - \Delta t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ G_5 E(t) \\ G_2 E(t) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

onde:

- 1 - matriz identidade.

3.3. Equacionamento em Variáveis de Estado dos Circuitos de Alimentação

Os circuitos de alimentação podem conter diversos elementos em sua estrutura. De acordo com o exposto acima, estes elementos apresentam particularidades que devem ser ressaltadas durante a formação da árvore do circuito, sendo considerados nesta ordem:

- 1°. Fontes de tensão (v);
- 2°. Capacitores (c);
- 3°. Elementos resistivos – interruptores e resistores (r);
- 4°. Indutores (l);
- 5°. Enrolamentos do dispositivo eletromagnético (e);
- 6°. Fontes de corrente (j).

Segundo as Leis de Kirchhoff:

$$[v_r] = -B_1[v_e] \quad (3.11a)$$

$$[i_e] = B_1^t[v_r] \quad (3.11b)$$

A matriz de laços fundamentais, B_1 , pode ser particionada em sub-matrizes S . Isto facilita a interpretação da relação existente entre os tipos de elemento do circuito e, também, de sua natureza [5]. Então, com a construção da árvore associada ao circuito, podemos ligar as tensões de elo com as tensões de ramo através da relação:

$$\begin{bmatrix} v_{ce} \\ v_{re} \\ v_{le} \\ v_{ee} \\ v_{je} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & S_4 & S_5 \\ S_6 & S_7 & S_8 & S_9 & S_{10} \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} & S_{20} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{vr} \\ v_{cr} \\ v_{rr} \\ v_{lr} \\ v_{er} \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

e as correntes de ramo com as correntes de elo por:

$$\begin{bmatrix} i_{vr} \\ i_{cr} \\ i_{rr} \\ i_{lr} \\ i_{er} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_1^t & S_6^t & S_{11}^t & S_{16}^t & S_{21}^t \\ S_2^t & S_7^t & S_{12}^t & S_{17}^t & S_{22}^t \\ S_3^t & S_8^t & S_{13}^t & S_{18}^t & S_{23}^t \\ S_4^t & S_9^t & S_{14}^t & S_{19}^t & S_{24}^t \\ S_5^t & S_{10}^t & S_{15}^t & S_{20}^t & S_{25}^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{ce} \\ i_{re} \\ i_{le} \\ i_{ee} \\ i_{je} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde a primeira letra do sub-índice - v, c, r, l, e ou j - identifica o tipo de elemento e a segunda letra - r ou e - a natureza do braço a ele vinculado.

Algumas observações permitem a simplificação de B_1 :

- Se a um capacitor é vinculado um elo, a tensão entre seus terminais é determinada unicamente em função das fontes de tensão e das tensões nos capacitores ramo, devido a prioridade desses elementos serem considerados ramos do circuito. Assim:

$$S_3 = S_4 = S_5 = 0 \quad (3.14a)$$

- Se a um indutor é vinculado um ramo, a corrente que o atravessa é determinada unicamente em função das correntes nos indutores, enrolamentos e fontes de corrente elo, também devido a prioridade desses elementos serem vinculados a elos do circuito. Então:

$$S_4^t = S_9^t = 0 \quad (3.14b)$$

- Para análise de dispositivos eletromagnéticos trifásicos é preciso garantir que todos os seus enrolamentos sejam vinculados a elos do circuito. Assim:

$$S_5 = S_{10} = S_{15} = S_{20} = S_{25} = 0 \quad (3.14c)$$

Desta forma, podemos reduzir B_1 , escrevendo-a como:

$$B_1 = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & 0 & 0 \\ S_6 & S_7 & S_8 & 0 \\ S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{16} & S_{17} & S_{18} & S_{19} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

sendo retirados os elementos v_{er} de (3.12) e i_{er} de (3.13).

Diferentes relações tensão-corrente podem ser obtidas para os diferentes tipos de elementos receptores do circuito.

Para os elementos resistivos, temos a Lei de Ohm:

$$[v_{ir}] = R_1 [i_{ir}] \quad (3.16a)$$

e

$$[v_{re}] = R_2 [i_{re}] \quad (3.16b)$$

onde R_1 e R_2 são matrizes diagonais de resistências de ramo e elo, respectivamente.

Para os capacitores, temos:

$$[i_{cr}] = C_1 \frac{d}{dt} [v_{cr}] \quad (3.17a)$$

e

$$[i_{ce}] = C_2 \frac{d}{dt} [v_{ce}] \quad (3.17b)$$

onde C_1 e C_2 são matrizes diagonais de capacitâncias de ramo e elo, respectivamente.

Para os indutores, além da indutância própria, é considerada a presença de indutâncias mútuas:

$$[v_{lr}] = L_1 \frac{d}{dt} [i_{lr}] + M \frac{d}{dt} [i_{me}] \quad (3.18a)$$

e

$$[v_{le}] = L_2 [i_{le}] + M^t \frac{d}{dt} [i_{mr}] \quad (3.18b)$$

A matriz L_1 tem os termos da diagonal iguais às indutâncias próprias dos indutores ramo e os termos fora da diagonal iguais às indutâncias mútuas existentes entre dois indutores ramo do circuito.

De maneira análoga, a matriz L_2 tem os termos da diagonal iguais às indutâncias próprias dos indutores elo e os termos fora da diagonal iguais às indutâncias mútuas existentes entre dois indutores elo do circuito.

Para considerar a presença de indutâncias mútuas entre indutores de natureza diferentes, ramo e elo, é montada a matriz $M = [m_{ij}]$.

Para implementarmos a formulação obtida em (3.10) é necessário expressar as matrizes G_1 a G_6 em função das diversas matrizes conhecidas do sistema, ou seja, em função das sub-matrizes S e das matrizes de resistências, capacitâncias e indutâncias dos elementos.

Manipulando as relações dadas em (3.16), (3.17) e (3.18) dentro das equações definidas em (3.12) e (3.13), obtemos [5]:

$$G_1 = \begin{bmatrix} -T_1^{-1}S_7^t H_1^{-1} R_2^{-1} S_7 & T_1^{-1}(S_{12}^t - S_7^t H_1^{-1} R_2^{-1} S_8 R_1 S_{13}^t) \\ T_2^{-1}(S_{13} H_2^{-1} R_1 S_8^t R_2^{-1} S_7 - S_{12}) & -T_2^{-1} S_{13} H_2^{-1} R_1 S_{13}^t \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$G_2 = \begin{bmatrix} -T_1^{-1}S_7^t H_1^{-1} R_2^{-1} S_6 & T_1^{-1}(S_{22}^t - S_7^t H_1^{-1} R_2^{-1} S_8 R_1 S_{23}^t) \\ T_2^{-1}(S_{13} H_2^{-1} R_1 S_8^t R_2^{-1} S_6 - S_{11}) & -T_2^{-1} S_{13} H_2^{-1} R_1 S_{23}^t \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$G_3 = \begin{bmatrix} T_1^{-1}(S_{17}^t - S_7^t H_1^{-1} R_2^{-1} S_8 R_1 S_{18}^t) \\ -T_2^{-1} S_{13} H_2^{-1} R_1 S_{18}^t \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$G_4 = \begin{bmatrix} -S_{17} + S_{18} H_2^{-1} R_1 S_8^t R_2^{-1} S_7 & -S_{18} H_2^{-1} R_1 S_{13}^t \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$G_5 = \begin{bmatrix} -S_{16} + S_{18} H_2^{-1} R_1 S_8^t R_2^{-1} S_6 & -S_{18} H_2^{-1} R_1 S_{23}^t \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

$$G_6 = \begin{bmatrix} -S_{18} H_2^{-1} R_1 S_{18}^t \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

onde:

$$H_1 = 1 + R_2^{-1} S_8 R_1 S_8^t \quad (3.25)$$

$$T_1 = C_1 + S_2^t C_2 S_2 \quad (3.26)$$

$$H_2 = 1 + R_1 S_8^t R_2^{-1} S_8 \quad (3.27)$$

$$T_2 = L_2 + S_{14} L_1 S_{14}^t + M^t S_{14}^t + S_{14} M \quad (3.28)$$

Para circuitos sem interruptores, as matrizes G_1 a G_6 ficam constantes durante toda a simulação, pois todos os termos presentes em suas definições são constantes. Porém, quando os interruptores estão presentes, podem ocorrer mudanças nos seus estados, determinando seqüências diferentes de operação do circuito, o que acarreta a mudança nas suas características de funcionamento.

Portanto, cada seqüência de funcionamento do circuito requer uma atualização das matrizes G_1 a G_6 . A determinação automática de seus valores possibilita a análise do desempenho do circuito externo de alimentação do dispositivo eletromagnético, independente do conhecimento antecipado das transições de seus interruptores ou de suas etapas de operação.

3.4. Chaveamento nos Circuitos de Alimentação

Neste trabalho foram considerados quatro diferentes tipos de interruptores: diodos, tiristores, transistores e tiristores-duais. Estes interruptores podem apresentar dois estados distintos durante o funcionamento do circuito, permitindo a passagem de corrente elétrica quando se encontram fechados e bloqueando esta passagem quando abertos. Foi escolhida a modelagem utilizando-se um elemento resistivo na caracterização destes elementos. São considerados com resistências elevadas, quando bloqueados, e com resistências de baixo valor, quando conduzindo. Em geral, utiliza-se uma razão de 10^6 entre estes dois valores de resistência.

Cada um dos interruptores considerado apresenta mecanismos de comutação particulares [5] [12]:

- O diodo entra em condução quando diretamente polarizado e bloqueia quando a corrente que o atravessa passa por zero. É, portanto, um dispositivo que possui comutação natural na entrada e saída de condução;

- A entrada em condução de um tiristor depende de sua polarização direta e da aplicação de um pulso de comando em seu terminal de controle. O bloqueio ocorre no instante que a corrente que o atravessa se anula. É um dispositivo que apresenta comutação forçada na entrada em condução e comutação natural na saída;
- O transistor pode ser comandado para entrada e saída de condução aplicando-se uma corrente em sua base. A presença da corrente habilita a condução, sua retirada leva o transistor ao corte;
- O tiristor-dual apresenta comutação natural na entrada em condução e comutação forçada no bloqueio. Ele entra em condução quando a tensão entre seus terminais passa por zero e bloqueia quando a corrente que o atravessa é positiva e um sinal é aplicado em seu terminal de gatilho.

No funcionamento de um circuito contendo interruptores, cada nova sequência de operação é consequência do chaveamento de um ou vários desses elementos. As diferenças existentes entre os mecanismos de comutação, como expostas acima, nos permite dividi-los em dois tipos: a comutação natural e a comutação provocada por uma ordem de controle [5] [12].

(a) Comutação natural:

A comutação natural dos interruptores acontece quando a corrente que o atravessa ou a tensão entre seus terminais se anula. Quando ocorre a mudança de sinal dessas variáveis entre um passo de cálculo anterior e o passo atual, é verificada a comutação do interruptor. O instante do chaveamento deve ser determinado com precisão para que não ocorram problemas numéricos, acarretando erros físicos na simulação do circuito. Desta forma, sempre que ocorre um chaveamento, é verificado se a mudança de sinal está dentro de um intervalo, adotado como limite ou tolerância de cálculo. Caso contrário, o programa retorna ao passo anterior e diminui o passo de cálculo até que a tolerância seja observada.

(b) Comutação comandada:

Este tipo de comutação acontece em instantes pré-determinados pelo usuário. Assim, a cada novo passo de cálculo, é verificado se ocorrerão pulsos de comando, sendo o tamanho do passo reduzido automaticamente para se adequar à tolerância imposta.

3.4.1. Cálculo da Tensão nos Terminais dos Interruptores

No item anterior foram destacadas as diferentes formas de comutação que podem acontecer nos circuitos elétricos que possuem interruptores dentre seus elementos. A verificação das mudanças de estado nestes interruptores é feita acompanhando-se o sinal da tensão aplicada em seus terminais a cada passo de cálculo efetuado durante o intervalo de simulação.

Quando, em dois passos de cálculo consecutivos, é observada uma mudança no sinal da tensão aplicada a um interruptor, é sinalizada uma passagem por zero e uma possível mudança em seu estado. É calculada a diferença entre estas tensões e nos casos onde este valor é superior à tolerância pré-estabelecida, o programa retorna ao passo de cálculo anterior e diminui o tamanho do passo, objetivando se aproximar do instante de transição de estado mais lentamente, evitando que problemas numéricos ocorram.

A expressão da tensão entre os terminais dos interruptores é obtida aplicando-se a Lei de Ohm, expressa em (3.16a) e (3.16b), nas equações de (3.12) e (3.13), uma vez que os interruptores são modelados como resistores. A expressão desta tensão é escrita da seguinte forma [5]:

$$Y = \begin{bmatrix} V_{\pi} \\ V_{re} \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} V_{cr} \\ i_{le} \end{bmatrix} + D \begin{bmatrix} V_{vr} \\ i_{je} \end{bmatrix} + F[i_{ce}] \quad (3.29)$$

onde:

$$C = \begin{bmatrix} -H_2^{-1}R_1S_8^tR_2^{-1}S_7 & H_2^{-1}R_1S_{13}^t \\ -R_2H_1^{-1}R_2^{-1}S_7 & -R_2H_1^{-1}R_2^{-1}S_8R_1S_{13}^t \end{bmatrix} \quad (3.30a)$$

$$D = \begin{bmatrix} -H_2^{-1}R_1S_8^tR_2^{-1}S_6 & H_2^{-1}R_1S_{23}^t \\ -R_2H_1^{-1}R_2^{-1}S_6 & -R_2H_1^{-1}R_2^{-1}S_8R_1S_{23}^t \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

$$F = \begin{bmatrix} H_2^{-1}R_1S_{18}^t \\ -R_2H_1^{-1}R_2^{-1}S_8R_1S_{18}^t \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

As matrizes R_1 e R_2 são montadas com os valores atuais das resistências dos interruptores. O vetor Y fornece a tensão nos terminais de todos os elementos resistivos

do circuito, resistores e interruptores. As tensões são então separadas com relação a estes elementos, possibilitando a análise de sinais entre o passo atual e o anterior.

3.5. Conclusão

Neste capítulo foram tratadas as equações que descrevem o circuito elétrico externo que alimenta o dispositivo eletromagnético trifásico. Foi abordada a forma de acoplamento dos dois sistemas presentes, aquele obtido no primeiro capítulo referente ao equacionamento dos campos presentes na estrutura eletromagnética e o desenvolvido neste capítulo, referente ao equacionamento do circuito em variáveis de espaço de estado.

Atenção foi dada a forma de implementação do método, assegurando que o sistema matricial de equações final obtido apresente sempre uma única solução numérica que corresponde ao comportamento real do conjunto circuito externo de alimentação / dispositivo eletromagnético trifásico.

Capítulo 4: Análise de Dispositivos Trifásicos Conectados a Circuitos Elétricos Externos de Alimentação

4.1. Introdução

Aqui é apresentado um exemplo de análise utilizando o método exposto no capítulo anterior.

Primeiramente é mostrada a forma de resolução analítica do problema, através da análise das malhas do circuito, identificando suas variáveis de estado e de acoplamento. Esta análise deixa claro a limitação apresentada pelo programa EFCIR, quando aplicado a casos trifásicos, da forma como era implementado. A maneira como o circuito era equacionado não garantia o número necessário de equações para resolução do problema, o que gerava erros que impossibilitavam sua análise correta.

Em seguida é mostrada a forma de resolução implementada no programa EFCIR, utilizando a matriz de incidência e o algoritmo de Welsh na determinação da árvore associada ao circuito. O programa original monta um sistema de equações incompleto, não sendo caracterizados todos os enrolamentos do dispositivo eletromagnético. Então, é alterada a topologia do circuito original e reformuladas suas equações, obedecendo-se aos critérios expostos neste trabalho, permitindo sua evolução correta no tempo.

4.2. Análise de Circuitos Trifásicos

Utilizaremos como exemplo um retificador trifásico de meia onda. O dispositivo eletromagnético em questão é o transformador trifásico utilizado na alimentação da estrutura retificadora.

Os enrolamentos primários do transformador estão identificados como E_1 , E_2 e E_3 e estão conectados em estrela. Estes enrolamentos são alimentados por três fontes, também conectadas em estrela, identificadas como V_1 , V_2 e V_3 . Os nós de conexão entre os elementos do circuito primário foram numerados de 1 a 5, como mostra a figura 4.1.

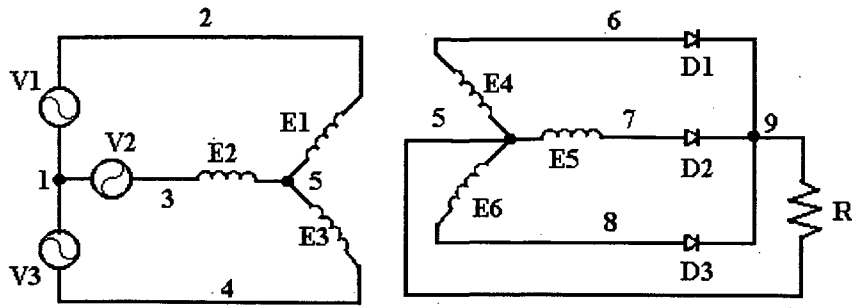


Figura 4.1 – Retificador trifásico de meia-onda.

Os enrolamentos secundários do transformador estão conectados em estrela e identificados como E_4 , E_5 e E_6 . Eles alimentam a estrutura retificadora composta pelos diodos D_1 , D_2 e D_3 . Por sua vez, esta estrutura alimenta uma carga representada pelo resistor R . Os nós no circuito secundário foram numerados de 5 a 9, como mostra a figura 4.1.

O nó 5 pertence ao circuito primário e secundário do transformador, porém este fato não indica uma conexão elétrica física entre os dois circuitos pois não existe nenhum caminho fechado envolvendo elementos do primário e do secundário do transformador ao mesmo tempo. Esta numeração assegura um grafo conectado e nos permite analisar os dois circuitos conjuntamente.

4.2.1. Resolução Analítica

O circuito na figura 4.1 não possui variáveis de estado, pois não estão presentes capacitores e/ou indutores entre seus elementos. Podemos identificar seis enrolamentos responsáveis pelo acoplamento entre as equações do circuito elétrico e magnético. Desta forma, precisamos de seis equações para descrever a tensão nos seis enrolamentos do circuito para, a partir delas, montarmos o sistema matricial de equações descrito no capítulo anterior e reproduzido abaixo.

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{cr} \\ i_{le} \end{bmatrix} = G_1 \begin{bmatrix} v_{cr} \\ i_{le} \end{bmatrix} + G_2 \begin{bmatrix} V \\ J \end{bmatrix} + G_3 [i_{ee}] \\ [v_{ee}] = G_4 \begin{bmatrix} v_{cr} \\ i_{le} \end{bmatrix} + G_5 \begin{bmatrix} V \\ J \end{bmatrix} + G_6 [i_{ee}] \end{cases} \quad (4.1)$$

onde:

- v_{cr} e i_{le} - variáveis de estado: tensão nos capacitores ramo e corrente nos indutores elo do circuito, respectivamente;
- V e J - fontes de tensão e corrente independentes do circuito, respectivamente;
- v_{ce} e i_{ee} - tensão e corrente nos enrolamentos elo do circuito, respectivamente.

Para resolvermos o circuito da figura 4.1 analiticamente, utilizaremos o Método das Malhas de Kirchhoff, nas seis malhas destacadas na figura 4.2.

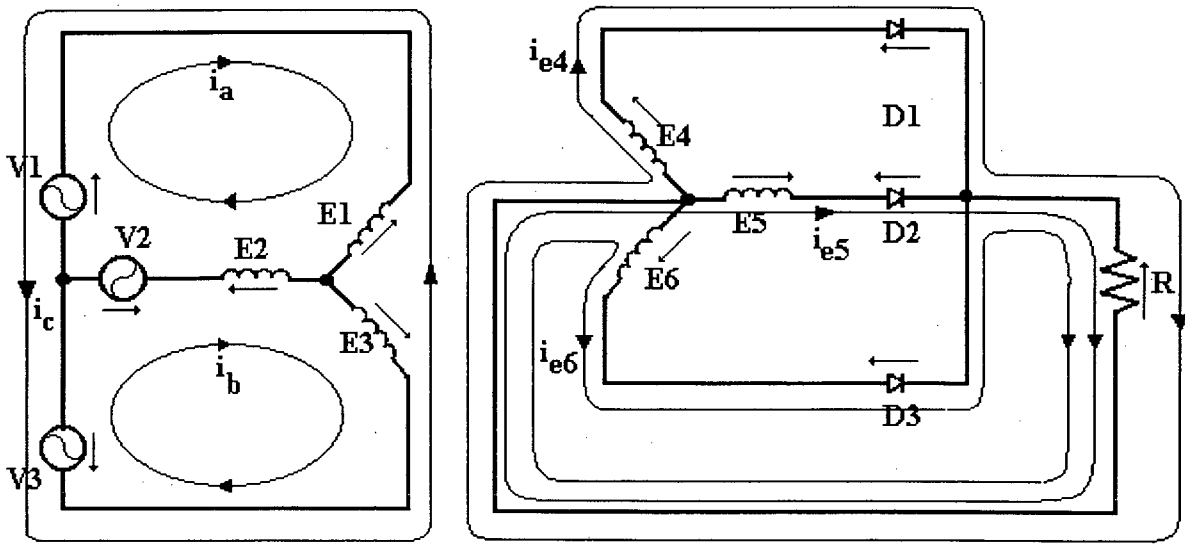


Figura 4.2 – Malhas escolhidas para resolução analítica do circuito.

No circuito secundário, obtemos:

$$v_{e4} = v_{D1} + v_R = R_{D1}i_{e4} + R_R(i_{e4} + i_{e5} + i_{e6}) = (R_{D1} + R_R)i_{e4} + R_Ri_{e5} + R_Ri_{e6} \quad (4.2a)$$

$$v_{e5} = v_{D2} + v_R = R_{D2}i_{e5} + R_R(i_{e4} + i_{e5} + i_{e6}) = R_Ri_{e4} + (R_{D2} + R_R)i_{e5} + R_Ri_{e6} \quad (4.2b)$$

$$v_{e6} = v_{D3} + v_R = R_{D3}i_{e6} + R_R(i_{e4} + i_{e5} + i_{e6}) = R_Ri_{e4} + R_Ri_{e5} + (R_{D3} + R_R)i_{e6} \quad (4.2c)$$

onde:

- R_R - valor da resistência do resistor R ;
- R_{D1} - valor da resistência atual do diodo D_1 ;

- R_{D2} - valor da resistência atual do diodo D_2 ;
- R_{D3} - valor da resistência atual do diodo D_3 .

O sistema de equações em (4.2) nos mostra que obtemos três equações linearmente independentes que determinam as tensões nos enrolamentos secundários do transformador em função das quedas de tensão nos outros componentes do circuito.

No circuito primário, teremos:

$$v_{e1} = V_1 - V_2 + v_{e2} \quad (4.3a)$$

$$v_{e2} = V_2 - V_3 + v_{e3} \quad (4.3b)$$

$$v_{e3} = V_3 - V_1 + v_{e1} \quad (4.3c)$$

O sistema de equações em (4.3) é linearmente dependente, ou seja, não conseguimos isolar as tensões nos enrolamentos primários do transformador e obtê-las em função unicamente das quedas de tensão nos outros elementos do circuito.

Assim sendo, é preciso criar uma nova equação independente das anteriores para completar o sistema. Isto pode ser conseguido colocando-se o um resistor com alto valor de resistência em paralelo com um dos enrolamentos do primário, onde ocorreu o problema. O alto valor da resistência não altera as características elétricas do circuito elétrico nem as características magnéticas do transformador trifásico.

O novo circuito, que passa a ser analisado, é mostrado na figura 4.3.

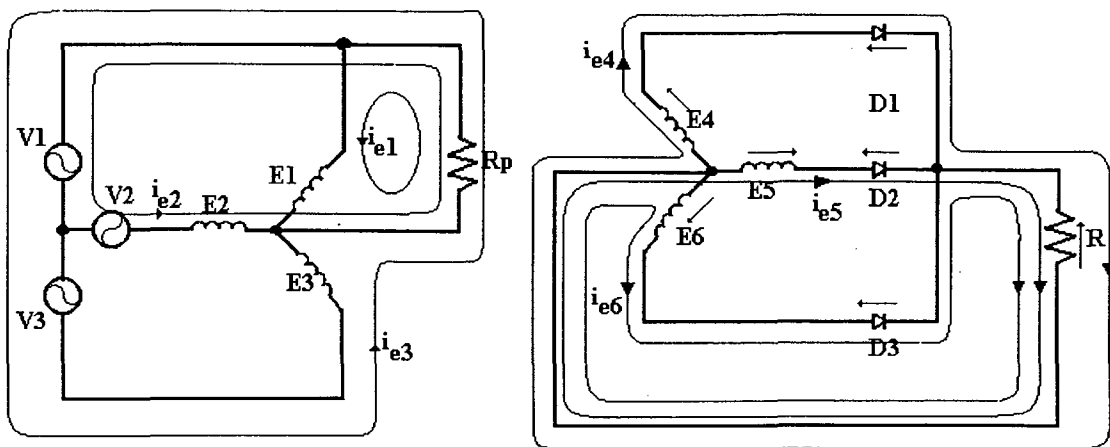


Figura 4.3 – Inclusão do resistor em paralelo com um enrolamento primário do transformador.

O número de nós do circuito modificado é o mesmo do circuito original. Nenhuma alteração foi feita no circuito secundário, permanecendo válidas as equações (4.2a) a (4.2c). As equações do circuito primário são:

$$v_{e1} = V_{Rp} = -R_p(i_{e1} + i_{e2} + i_{e3}) = -R_p i_{e1} - R_p i_{e2} - R_p i_{e3} \quad (4.4a)$$

$$v_{e2} = V_2 - V_1 + v_{e1} = V_2 - V_1 - R_p i_{e1} - R_p i_{e2} - R_p i_{e3} \quad (4.4b)$$

$$v_{e3} = V_3 - V_1 + v_{e1} = V_3 - V_1 - R_p i_{e1} - R_p i_{e2} - R_p i_{e3} \quad (4.4c)$$

Podemos agrupar as equações dos sistemas (4.2) e (4.4) e montar o sistema matricial (4.1). As matrizes G_1 , G_2 , G_3 e G_4 são nulas, pois estão relacionadas às variáveis de estado no circuito que, neste exemplo, não existem.

$$\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \\ v_{e4} \\ v_{e5} \\ v_{e6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (R_{D1} + R_R) & R_R & R_R \\ 0 & 0 & 0 & R_R & (R_{D1} + R_R) & R_R \\ 0 & 0 & 0 & R_R & R_R & (R_{D1} + R_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e1} \\ i_{e2} \\ i_{e3} \\ i_{e4} \\ i_{e5} \\ i_{e6} \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

A evolução no tempo do sistema (4.5) acoplado às equações de campo do transformador, descritas no primeiro capítulo, permite a análise das variáveis elétricas, tensão e corrente nos diversos elementos do circuito, e das variáveis magnéticas presentes no dispositivo eletromagnético. As variáveis elétricas são avaliadas através de suas formas de onda e as variáveis magnéticas, através de suas cartas de campo, obtidas utilizando-se o programa EFCAD, pós-processador EFGN.

4.2.2. Resolução Utilizando o Método Implementado no Programa EFCIR

Primeiramente é apresentada a montagem sem a modificação na topologia do circuito, implementada no programa EFCIR durante o desenvolvimento deste trabalho [5].

A montagem da matriz de incidência do circuito é feita a partir da declaração de seus elementos e dos nós aos quais eles estão conectados. A ordem de entrada dos elementos é $V_1, V_2, V_3, D_1, D_2, D_3, R, E_1, E_2, E_3, E_4, E_5$ e E_6 . Os nós do circuito foram numerados de 1 a 9, como mostra a figura 4.1.

$$F = \begin{matrix} & V_1 & V_2 & V_3 & D_1 & D_2 & D_3 & R & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \\ \left[\begin{array}{cccccccccccc} +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] & \left. \begin{array}{l} \text{nós} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{array} \right\} \end{matrix} \quad (4.6)$$

Aplicando o Algoritmo de Welsh verificamos que os elementos $V_1, V_2, V_3, D_1, D_2, D_3, R$ e E_1 são ramos no circuito e os elementos E_2, E_3, E_4, E_5 e E_6 , elos. A matriz de incidência modificada, F' , fica:

$$F' = [F'_1 : F'_2] = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

Utilizando as submatrizes F'_1 e F'_2 obtemos a matriz de cortes fundamentais, K_2 :

$$K_2 = F_1^t \cdot F_2^t = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ +1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Utilizando a matriz K_2 mostrada em (4.8), podemos relacionar os elementos ramo e elo do circuito:

$$\begin{bmatrix} v_{e2} \\ v_{e3} \\ v_{e4} \\ v_{e5} \\ v_{e6} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & +1 \\ -1 & 0 & +1 & : & 0 & 0 & 0 & 0 & : & +1 \\ 0 & 0 & 0 & : & -1 & 0 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & -1 & 0 & -1 & : & 0 \\ 0 & 0 & 0 & : & 0 & 0 & -1 & -1 & : & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{V1} \\ v_{V2} \\ v_{V3} \\ \dots \\ v_{D1} \\ v_{D2} \\ v_{D3} \\ v_R \\ \dots \\ v_{el} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

No sistema mostrado em (4.9) podemos identificar as submatrizes S_{16} , S_{18} e S_{20} , as demais submatrizes são nulas:

$$S_{16} = \begin{bmatrix} -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.10a)$$

$$S_{18} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (4.10b)$$

$$S_{20} = \begin{bmatrix} +1 \\ +1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10c)$$

Ao utilizarmos estas submatrizes para a construção do sistema geral de equações do conjunto dispositivo eletromagnético / circuito elétrico externo, verificamos:

- As matrizes G_1 , G_2 , G_3 e G_4 são nulas:

Isto já era esperado, pois estas matrizes relacionam as derivadas temporais das variáveis de estado do circuito às próprias variáveis, às fontes independentes e às correntes nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético. E, no entanto, o circuito tomado como exemplo não possui capacitores e indutores, não possuindo variáveis de estado.

- As matrizes G_5 e G_6 têm dimensão final (5×3) e (5×5) , respectivamente:

Aqui ocorre o erro na formulação do problema, o número de equações obtidas é inferior ao número de variáveis do circuito. Como o primeiro enrolamento, no primário do transformador trifásico, foi considerado um ramo do circuito, suas características não aparecem no equacionamento final do problema. Quando evoluímos o sistema mostrado em (4.11) no tempo, verificamos que as grandezas associadas a este enrolamento, a tensão e a corrente entre seus terminais, são nulas durante todo o intervalo de simulação.

$$\begin{bmatrix} v_{e2} \\ v_{e3} \\ v_{e4} \\ v_{e5} \\ v_{e6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} +1 & -1 & 0 \\ +1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-R_{D1} - R_R) & -R_R & -R_R \\ 0 & 0 & -R_R & (-R_{D2} - R_R) & -R_R \\ 0 & 0 & -R_R & -R_R & (-R_{D3} - R_R) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{e2} \\ i_{e3} \\ i_{e4} \\ i_{e5} \\ i_{e6} \end{bmatrix}$$

A eliminação do enrolamento E_1 do sistema de equações do problema acarreta erro na determinação de todas as outras variáveis do circuito. Desta forma, nenhuma análise pode ser estabelecida utilizando-se as cartas de campo da estrutura eletromagnética e/ou as formas de onda das tensões e correntes nos diversos elementos do circuito elétrico.

O método atual, implementado no programa EFCIR, mantém a estrutura básica do programa original. Porém, uma readequação na topologia do circuito é realizada nos casos em que são verificados problemas como o descrito acima. A natureza dos enrolamentos é verificada no momento em que a matriz de incidência alterada, F' , é montada. Nos casos em que algum enrolamento é considerado ramo do circuito, um resistor é colocado em paralelo com este enrolamento, forçando-o a se tornar um elo do circuito durante a reformulação de sua matriz de incidência. O valor da resistência do resistor somado ao circuito são $0,1M\Omega$, não interferindo em suas características elétricas ou nas características magnéticas do dispositivo. Todo este procedimento é realizado de forma automática, não necessitando da análise prévia do circuito pelo usuário do programa.

O novo circuito a ser analisado é mostrado na figura 4.4.

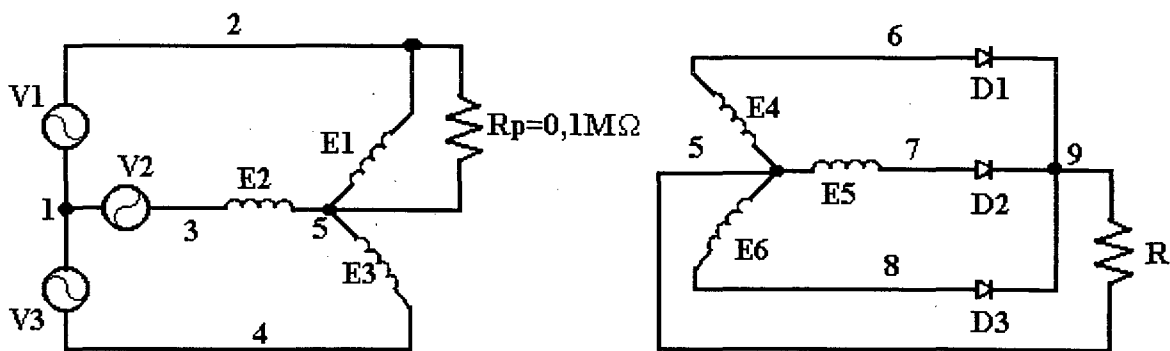


Figura 4.4 – Circuito alterado: $R_p // E_1$.

A matriz de incidência permanece com o número de linhas inalterado, pois nenhum novo nó foi definido no circuito, porém uma nova coluna é montada devido ao elemento novo inserido a ele. Como o elemento colocado em paralelo com o enrolamento E_1 é um resistor, este será acrescentado a matriz de incidência antes dos enrolamentos, obedecendo a ordem descrita no segundo capítulo, item 2.5.

A nova matriz de incidência será:

$$F = \begin{matrix} & \begin{matrix} V_1 & V_2 & V_3 & D_1 & D_2 & D_3 & R & R_p & E_1 & E_2 & E_3 & E_4 & E_5 & E_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} +1 & +1 & +1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & +1 & +1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & +1 & +1 & +1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \left. \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \\ 8 \\ 9 \end{matrix} \right\} \text{nós} \end{matrix} \end{matrix} \quad (4.12)$$

Aplicando-se o Algoritmo de Welsh à matriz em (4.12), identificamos os novos ramos e elos do circuito. E, com a matriz de incidência alterada, podemos calcular a matriz de laços fundamentais, B_1 .

Então, com a construção de uma nova árvore associada ao circuito, podemos interligar as tensões de elo com as tensões de ramo através da relação:

$$\begin{bmatrix} v_{e1} \\ v_{e2} \\ v_{e3} \\ v_{e4} \\ v_{e5} \\ v_{e6} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & +1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{V1} \\ v_{V2} \\ v_{V3} \\ \dots \\ v_{D1} \\ v_{D2} \\ v_{D3} \\ v_R \\ v_{Rp} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

No sistema matricial mostrado em (4.13) podemos identificar as submatrizes S_{16} e S_{18} e, com elas, podemos determinar as matrizes G_5 e G_6 do sistema de equações do circuito elétrico acoplado à estrutura eletromagnética:

$$G_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & 0 & +1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.14a)$$

$$G_6 = \begin{bmatrix} -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ -R_p & -R_p & -R_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (R_{DI} + R_R) & R_R & R_R \\ 0 & 0 & 0 & R_R & (R_{DI} + R_R) & R_R \\ 0 & 0 & 0 & R_R & R_R & (R_{DI} + R_R) \end{bmatrix} \quad (4.14b)$$

Estas matrizes conduzem a um sistema idêntico ao obtido fazendo-se a resolução analítica do problema, equação (4.5), descrevendo todas as características elétricas presentes do circuito externo. Acoplado às equações de campo do dispositivo eletromagnético, este sistema possibilita a análise temporal, através das curvas das tensões e correntes nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético, e espacial, através das cartas de campo obtidas durante o intervalo de simulação.

4.3. Conclusão

Neste capítulo foi aplicado o método desenvolvido neste trabalho e implementado no programa EFCIR a um circuito retificador trifásico de meia-onda alimentado por um transformador trifásico.

A solução analítica do problema mostra a necessidade de novas equações na resolução do circuito para tornar o sistema final de equações linearmente independente. A resolução numérica do problema, utilizada no método implementado no programa EFCIR, identifica o número de equações necessárias à formação deste sistema verificando a natureza dos enrolamentos dos dispositivos eletromagnéticos. A presença de enrolamentos ramo no circuito reduz o número de equações linearmente independentes do mesmo, impossibilitando seu equacionamento e evolução correta no tempo.

Após a montagem da matriz de incidência do circuito, o programa detecta e acrescenta, automaticamente, resistores em paralelo com os enrolamentos considerados ramos no circuito e redefine sua árvore, mudando a natureza dos enrolamentos e completando o sistema de equações.

Capítulo 5: Aplicações e Resultados

5.1. Introdução

Aqui serão apresentados alguns exemplos para validação do método de cálculo implementado no programa EFCIR. São dois os principais aspectos considerados na observação dos resultados: se as formas de onda das tensões e correntes nos diversos elementos do circuito conferem com as formas de onda obtidas em práticas realizadas em laboratório ou em programa específicos de simulação de circuitos elétricos e eletrônicos e se os campos presentes no dispositivo eletromagnético estão corretos.

Para evidenciar cada um desses aspectos são apresentados alguns exemplos de aplicação simulados utilizando-se o método de cálculo implementado no programa EFCIR e comparados com os resultados de simulações feitas utilizando-se outros programas, como o PSPICE e o EFCAD.

O primeiro exemplo traz a simulação de um retificador trifásico de onda completa em ponte não controlado, um circuito muito utilizado em aplicações de alta potência. As formas de onda das tensões e correntes nos elementos do circuito obtidas através do programa EFCIR são comparadas com aquelas obtidas em simulação no PSPICE.

O segundo exemplo traz a simulação de um conversor trifásico de meia onda. Neste circuito são utilizados interruptores controlados – tiristores – em seu chaveamento. Também aqui é utilizado o programa PSPICE para comparação de resultados.

O último exemplo é a simulação de um motor trifásico de imãs permanentes alimentado por fontes de tensão senoidal trifásicas e equilibradas, não sendo considerado o movimento do rotor, permanecendo a estrutura parada. Este exemplo visa comparar a distribuição do fluxo magnético no motor obtida utilizando-se o programa EFCIR com aquela obtida com o programa EFCM. Primeiramente são destacadas as cartas de campo devido unicamente a presença de imãs permanentes na estrutura do motor. Em seguida, as cartas de campo obtidas em diferentes instantes da simulação, com a presença de excitação externa se somando as condições iniciais impostas pelos imãs, são comparadas utilizando-se estes dois programas.

5.2. Retificador Trifásico em Ponte

O primeiro exemplo de aplicação apresentado é de um circuito retificador trifásico em ponte. Esta forma de retificação é largamente utilizada em aplicações industriais de alta potência. O circuito na figura 5.1 mostra o retificar trifásico de onda completa analisado.

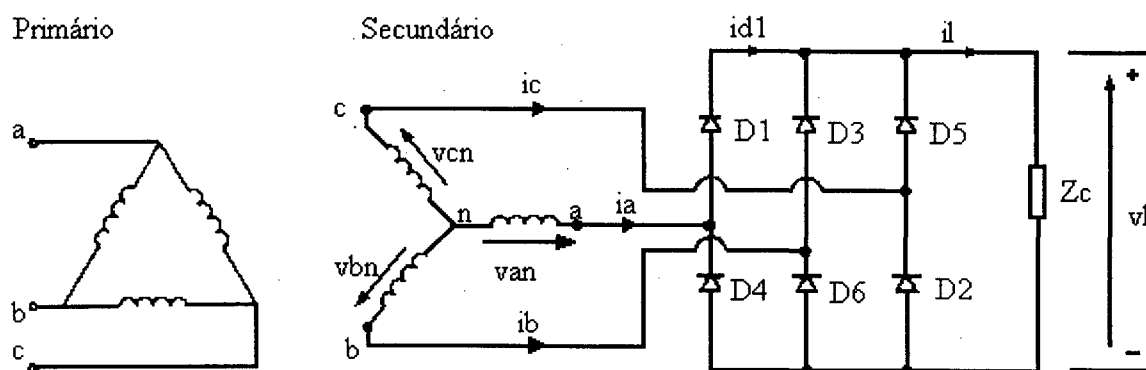


Figura 5.1 – Retificador trifásico em ponte: retificação em onda completa.

O princípio de funcionamento do circuito acima é bastante simples [12]. A ponte retificadora, formada pelos diodos D_1 a D_6 , é alimentada por uma rede de tensões trifásica. Este circuito, por sua vez, alimenta uma carga Z_c com uma tensão contínua, porém não constante, com uma frequência de ondulação igual a seis vezes a frequência fundamental do sistema trifásico original. Os diodos são numerados na ordem em que entram em condução, definindo as diversas seqüências de operação do circuito, cada um permanecendo em condução durante 120° . A seqüência de condução dos diodos é 1-2, 2-3, 3-4, 4-5, 5-6 e 6-1. O par de diodos conectado entre as linhas de alimentação trifásica que apresentam a maior diferença de potencial, valores instantâneos, entra em condução, transferindo esta tensão aos terminais da carga.

O circuito mostrado na figura 5.2 foi simulado utilizando-se o programa EFCIR. Os enrolamentos de um transformador trifásico, com o primário conectado em delta e o secundário conectado em estrela, foram considerados na declaração da topologia do circuito, sendo então este transformador o dispositivo eletromagnético trifásico analisado. Os enrolamentos primários possuem 2501 espiras enquanto os secundários possuem 100 espiras. Em ambos os conjuntos de enrolamentos foram considerados condutores perfeitos, resistência nula, e desconsideradas as indutâncias de cabeça de bobina, $\ell = 0$.

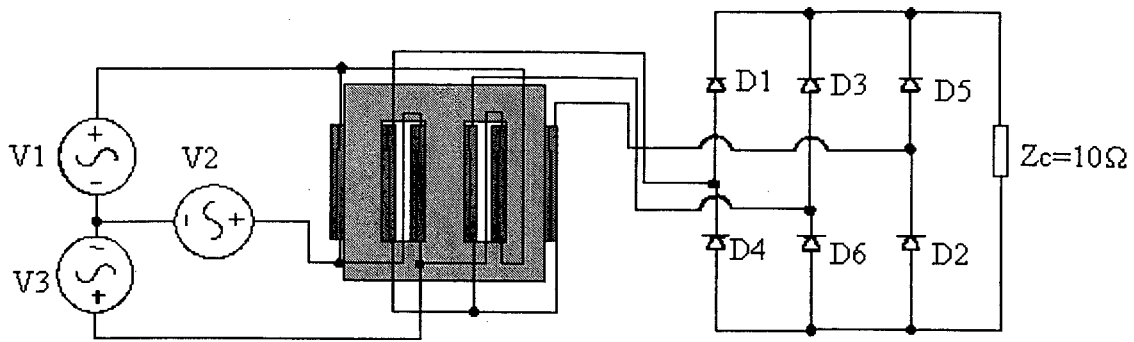


Figura 5.2 – Circuito simulado no programa EFCIR.

onde:

- $V_1 = 380 \cos(377t)$;
- $V_2 = 380 \cos(377t + 120^\circ)$;
- $V_3 = 380 \cos(377t + 240^\circ)$;
- $r_c = 0,1\Omega$ (resistência de condução dos diodos);
- $R_b = 0,1M\Omega$ (resistência de bloqueio dos diodos).

Para verificação das formas de onda obtidas pelo programa EFCIR, foi realizada a simulação do circuito mostrado na figura 5.3 utilizando-se o programa PSPICE.

PSPICE é um programa de simulação de circuitos elétricos, não sendo consideradas as características magnéticas de seus elementos mas sim seus efeitos sobre suas características elétricas terminais. Devido a este fato, não é utilizado no circuito abaixo um transformador trifásico na alimentação da ponte retificadora trifásica, sendo a presença deste representada por um conjunto de fontes de tensão com as mesmas características elétricas apresentadas pelo secundário do transformador utilizado no circuito original, mostrado na figura 5.2.

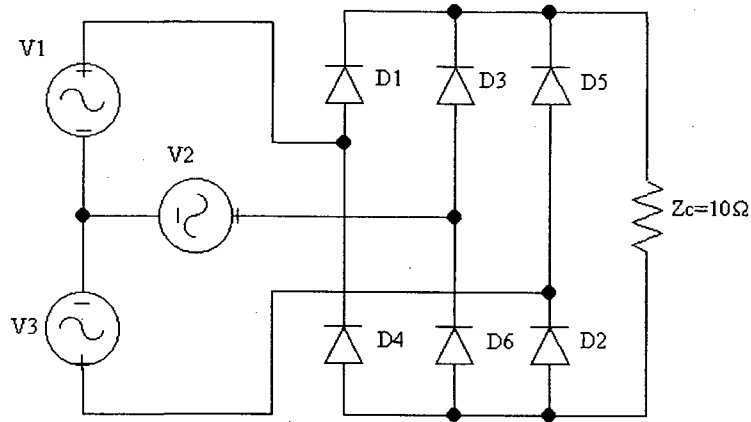


Figura 5.3 – Circuito simulado no programa PSPICE.

onde:

- $V_1 = 26,35 \sin(377t + 60^\circ)$;
- $V_2 = 26,35 \sin(377t + 180^\circ)$;
- $V_3 = 26,27 \sin(377t + 300^\circ)$.

A seguir são mostradas algumas formas de onda das tensões e correntes presentes no circuito, obtidas na simulação feita pelo programa EFCIR e pelo programa PSPICE.

- Tensão e corrente no enrolamento primário E_1 do transformador, obtidas pelo programa EFCIR:

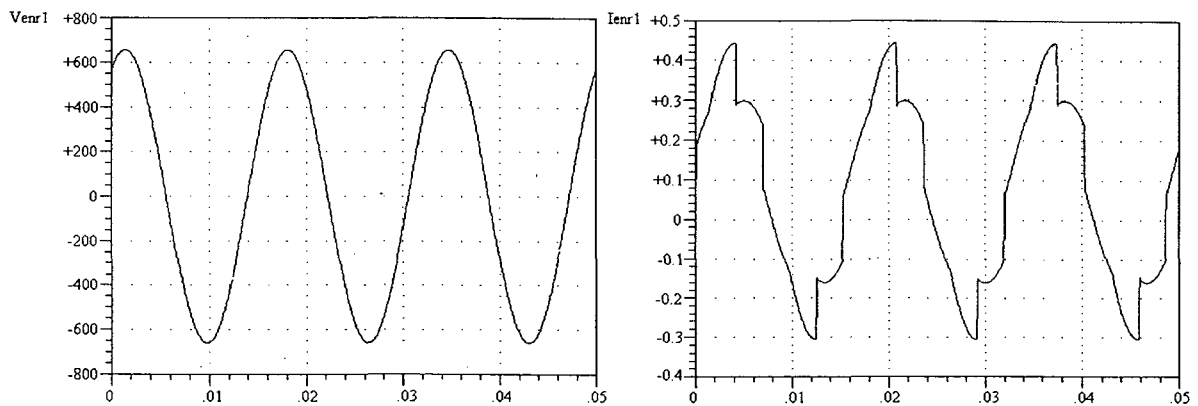
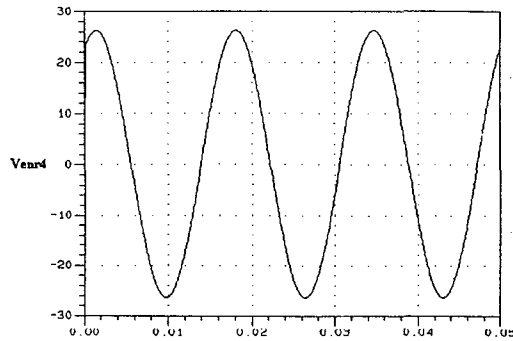


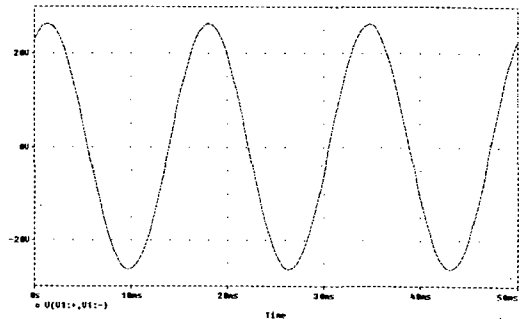
Figura 5.4 – Tensão e corrente na primeira bobina do transformador (enrolamento primário):

Programa EFCIR.

- Tensão no enrolamento secundário E_4 do transformador, obtida pelo programa EFCIR, e na fonte de tensão V_1 , obtida pelo PSPICE:



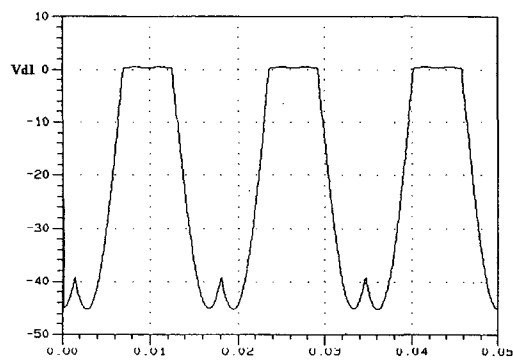
(a)



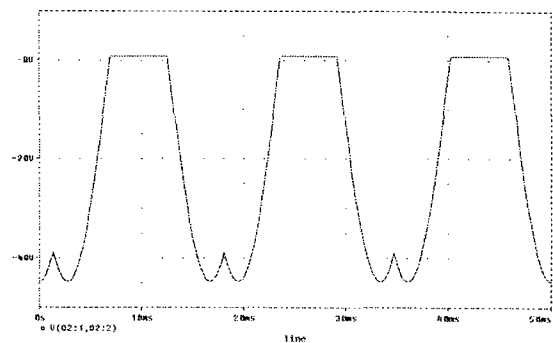
(b)

Figura 5.5 – (a) Tensão na quarta bobina do transformador (enrolamento secundário): Programa EFCIR; (b) Tensão na fonte V_1 : Programa PSPICE.

- Tensão e corrente no diodo D_1 da ponte retificadora:

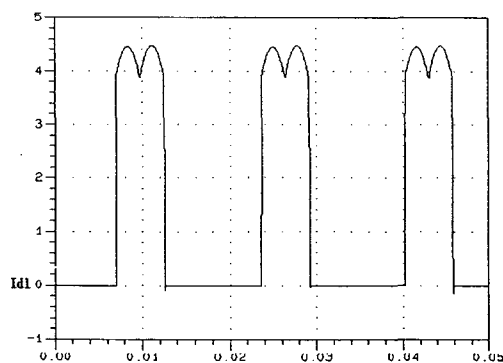


(a)

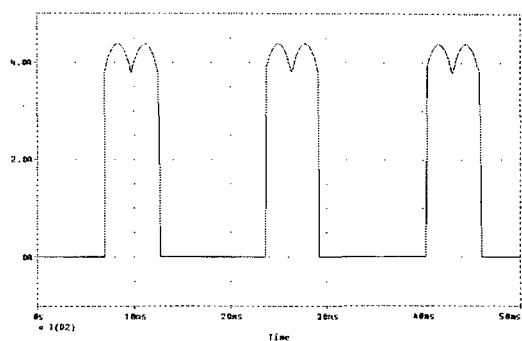


(b)

Figura 5.6 – Tensão no diodo D_1 da ponte retificadora: (a) Programa EFCIR; (b) Programa PSPICE.



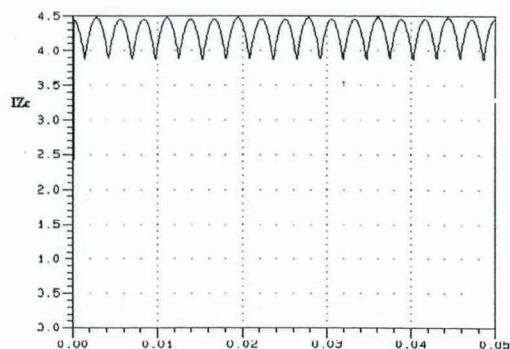
(a)



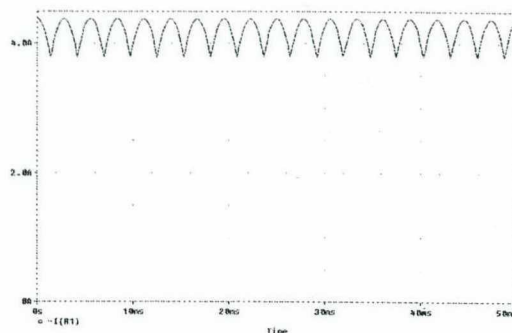
(b)

Figura 5.7 – Corrente no diodo D_1 da ponte retificadora: (a) Programa EFCIR; (b) Programa PSPICE.

■ Corrente na carga:



(a)



(b)

Figura 5.8 – Corrente na carga: (a) Programa EFCIR; (b) Programa PSPICE.

Além destas informações de tensão e corrente presentes em cada um dos elementos do circuito elétrico alimentado pelo transformador trifásico, o EFCIR nos permite obter cartas de campo em diversos instantes diferentes de operação deste transformador. Com estas cartas podemos visualizar a distribuição do fluxo magnético no espaço interno e externo a peça, nos casos em que ocorre espreadimento. Abaixo são apresentadas três cartas de campo com as equipotenciais obtidas no intervalo de simulação de 0 a 50ms.

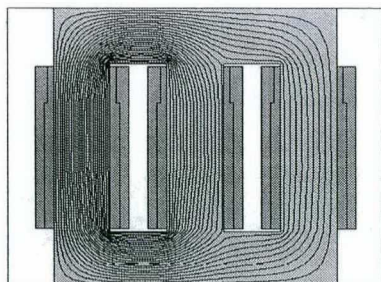
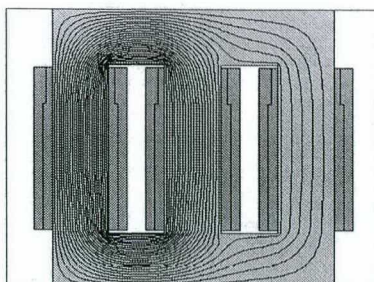
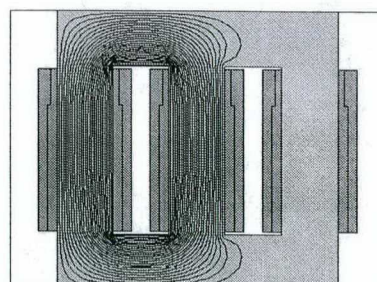
(a) $t = 20\text{ms}$ (b) $t = 21\text{ms}$ (c) $t = 22\text{ms}$

Figura 5.9 – Cartas de campo do transformador trifásico.

5.3. Conversor Trifásico de Meia-Onda

Conversores trifásicos proporcionam vantagens quando comparados com conversores monofásicos: um valor médio da tensão de saída maior, sendo também maior a frequência da ondulação presente nesta tensão, isso facilita a filtragem para a redução das ondulações presentes nas formas de onda da tensão e da corrente na carga alimentada [12].

Devido a essas características, conversores trifásicos são amplamente utilizados em aplicações como controle de velocidade de máquinas com potências elevadas. A figura 5.10 mostra o circuito de um conversor trifásico de meia-onda, que passa a ser analisado.

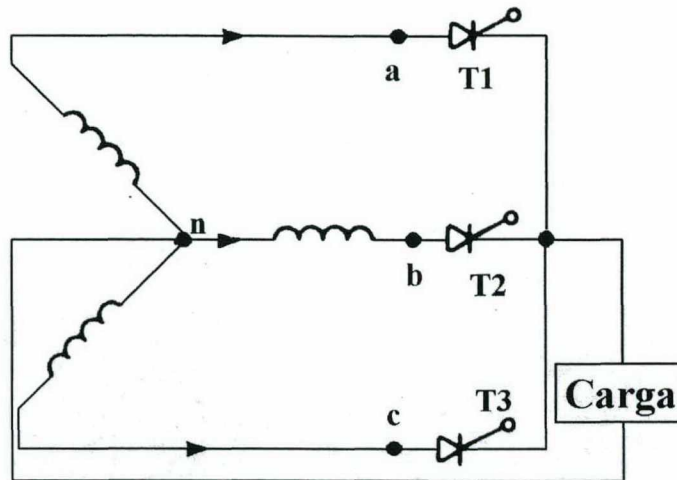


Figura 5.10 – Conversor trifásico de meia-onda.

Quando o tiristor T_1 é acionado em $\omega t = \pi/6 + \alpha$, a tensão de fase v_{an} é aplicada sobre a carga, até que o tiristor T_2 seja acionado em $\omega t = 5\pi/6 + \alpha$. Quando o tiristor T_2 é acionado, T_1 é polarizado reversamente, devido a tensão de linha v_{ab} ($v_{an} - v_{bn}$) ser negativa, e interrompe sua condução passando ao estado bloqueado. A tensão de fase v_{bn} é aplicada à carga até que o tiristor T_3 seja acionado em $\omega t = 3\pi/2 + \alpha$. Quando T_3 é acionado, T_2 é bloqueado e a tensão de fase v_{cn} é aplicada à carga, até que o tiristor T_1 seja acionado novamente iniciando um novo ciclo.

O circuito mostrado na figura 5.11 foi simulado utilizando-se o programa EFCIR. Os enrolamentos de um transformador trifásico, com o primário e o secundário conectados em estrela, foram considerados na declaração da topologia do circuito, sendo então este transformador o dispositivo eletromagnético trifásico analisado. Os enrolamentos primários possuem 2000 espiras enquanto os secundários possuem 200 espiras. Em ambos os conjuntos de enrolamentos foram considerados condutores perfeitos, resistência nula, e desconsiderada as indutâncias de cabeça de bobina.

- $t_{d1} = 15,28\text{ms} - t_{e1} = 15,38\text{ms}$ (tempo de aplicação e extinção do pulso de comando no tiristor T_1);
- $t_{d2} = 4,167\text{ms} - t_{e1} = 4,177\text{ms}$ (tempo de aplicação e extinção do pulso de comando no tiristor T_2);
- $t_{d3} = 9,722\text{ms} - t_{e3} = 9,822\text{ms}$ (tempo de aplicação e extinção do pulso de comando no tiristor T_3);

Para verificação das formas de onda obtidas pelo programa EFCIR, foi realizada a simulação do circuito mostrado na figura 5.11 utilizando-se o programa PSPICE. Um conjunto de fontes de tensão com as mesmas características elétricas apresentadas pelo secundário do transformador utilizado no circuito original alimenta o conversor.

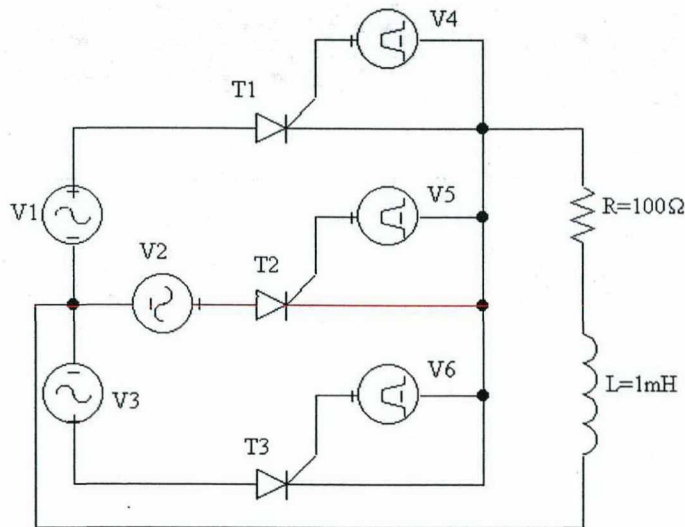


Figura 5.11 – Circuito simulado no programa PSPICE.

onde:

- $V_1 = 38,2 \sin(377t)$;
- $V_2 = 37,7 \sin(377t - 120^\circ)$;
- $V_3 = 38,2 \sin(377t - 240^\circ)$.
- $V_4 = 5V - (15,28\text{ms} < t < 15,38\text{ms})$;

- $V_5 = 5V - (4,167ms < t < 4,267ms);$
- $V_6 = 5V - (9,722ms < t < 9,822ms).$

A seguir são mostradas diversas formas de onda das tensões e correntes presentes no circuito, obtidas na simulação feita pelo programa EFCIR e pelo programa PSPICE:

- Tensão e corrente no enrolamento primário, E_1 , do transformador:

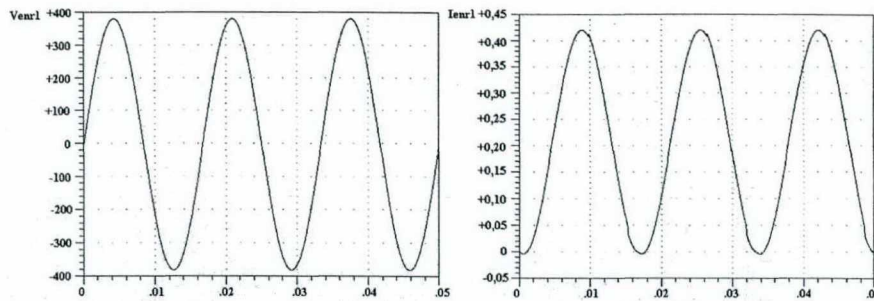


Figura 5.12 – Tensão e corrente na primeira bobina do transformador (enrolamento primário): Programa EFCIR.

- Corrente no enrolamento secundário E_4 do transformador, obtida pelo programa EFCIR, e na fonte de tensão V_1 , obtida pelo programa PSPICE:

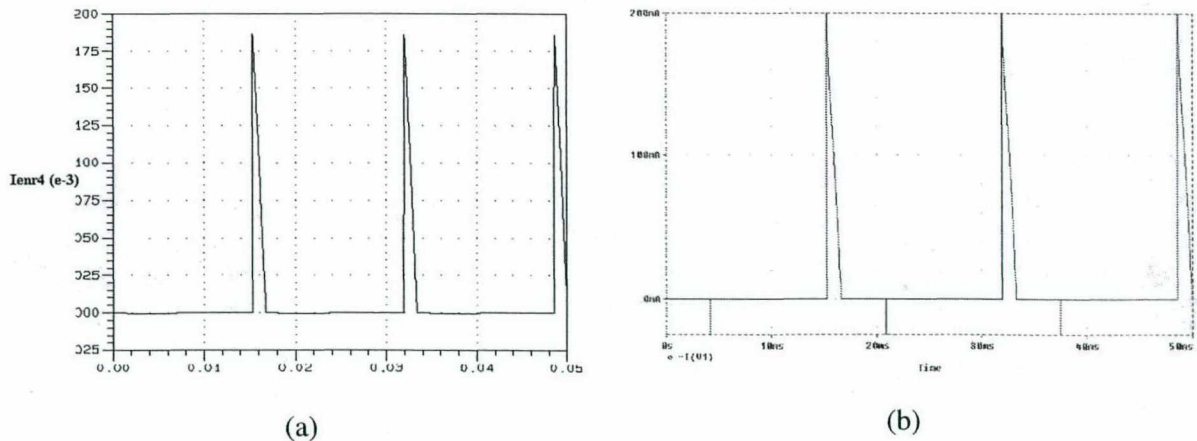
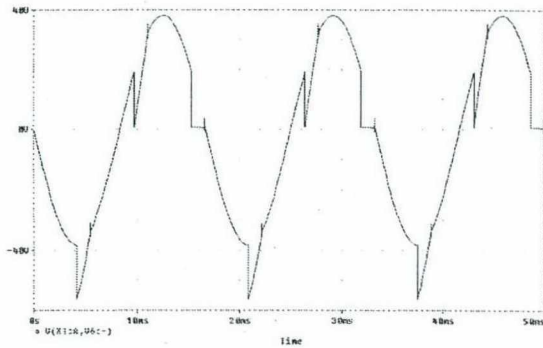
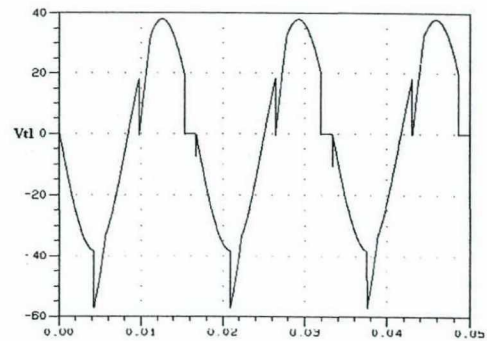


Figura 5.13 – (a) Corrente na quarta bobina do transformador (enrolamento secundário): Programa EFCIR; (b) Corrente na fonte V_1 : Programa PSPICE.

■ Tensão no tiristor T_1 :



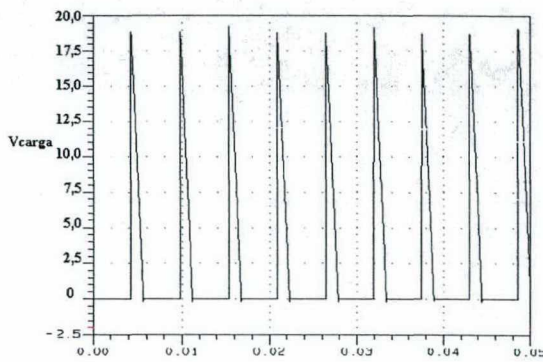
(a)



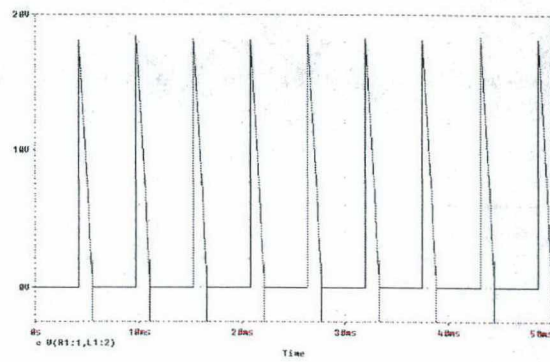
(b)

Figura 5.14 – Tensão no tiristor T_1 : (a) Programa EFCIR; (b) Programa PSPICE.

■ Tensão na carga:



(a)



(b)

Figura 5.15 – Tensão na carga: (a) Programa EFCIR; (b) Programa PSPICE.

Abaixo são apresentadas seis cartas de campo obtidas pelo programa EFCIR no intervalo de simulação de 0 a 50ms.

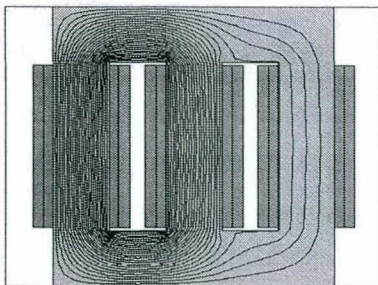
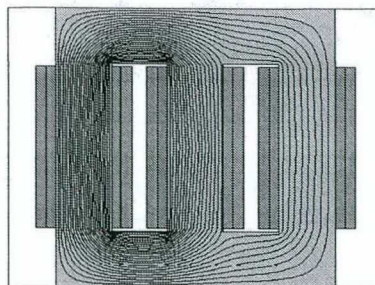
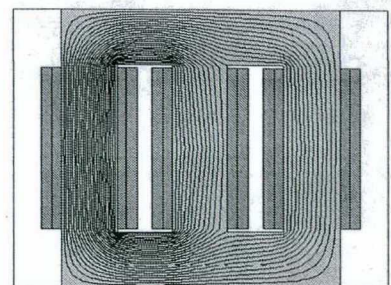
(a) $t = 23\text{ms}$ (b) $t = 24\text{ms}$ (c) $t = 25\text{ms}$

Figura 5.16 – Cartas de campo do transformador trifásico.

5.4. Motor Trifásico de Imãs Permanentes

O objetivo desta última simulação é a comparação das cartas de campos obtidas com o auxílio do programa EFCIR e do programa EFCM. EFCM é o programa do EFCAD que possibilita a simulação de máquinas girantes alimentadas por tensões aplicadas a seus enrolamentos, considerando o movimento rotórico. Neste exemplo a estrutura permanecerá parada.

Primeiramente serão levantados os campos iniciais presentes na estrutura, devido unicamente a presença dos imãs permanentes em seu rotor. Para isso basta desligar as fontes de alimentação da estrutura na simulação com EFCM. No EFCIR os enrolamentos são declarados curto-circuitados.

As cartas de campo obtidas através destas simulações são mostradas na figura 5.17, abaixo.

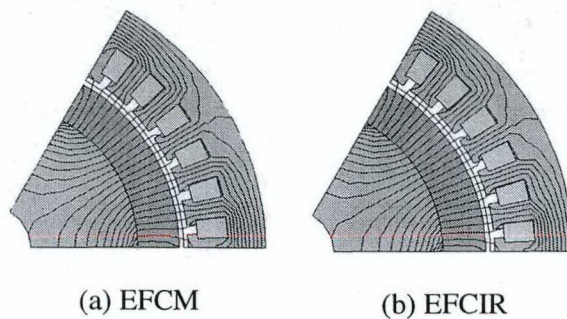


Figura 5.17 – Motor trifásico de imãs permanentes: campo devido aos imãs.

Posteriormente a estrutura foi alimentada por um sistema trifásico equilibrado de tensões senoidais. Os campos devido a esta alimentação externa se somam aos campos iniciais presentes devido à indução remanente, gerando distorções nos fluxos pré-estabelecidos. Foram realizadas duas simulações no intervalo de 0ms a 50ms.

A figura 5.18 mostra algumas cartas de campo, obtidas durante este intervalo utilizando-se os dois programas.

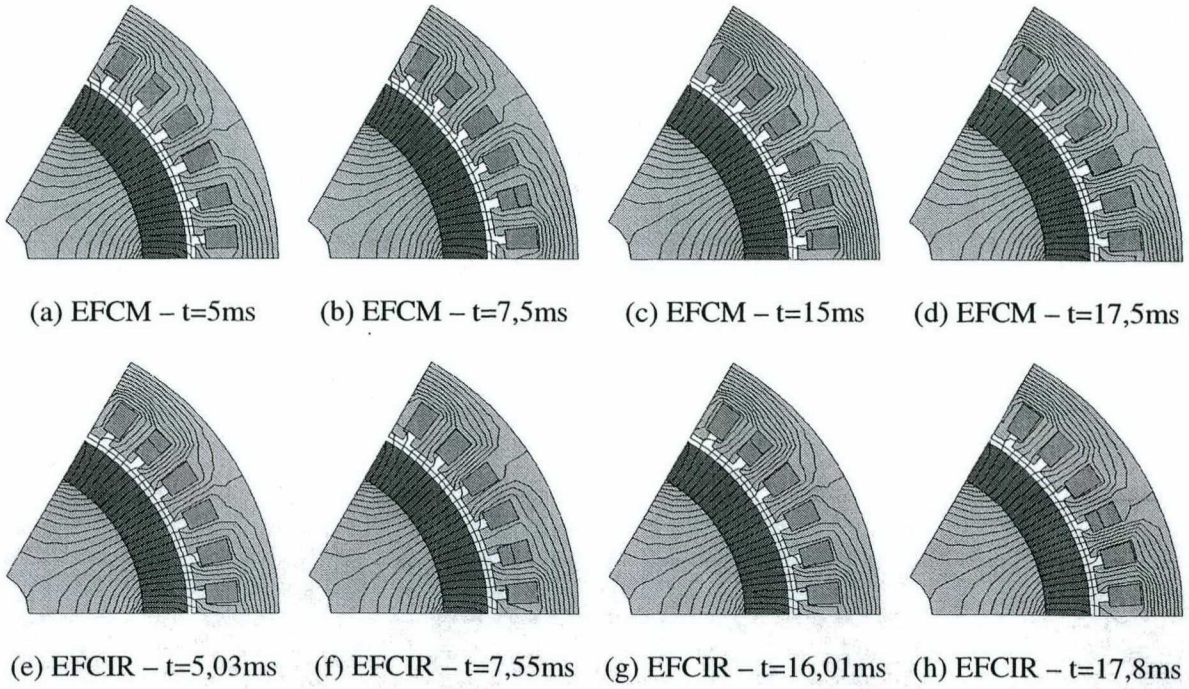


Figura 5.18 – Motor trifásico de ímãs permanentes: campos devido aos ímãs e à alimentação externa.

Os enrolamentos do motor foram considerados conectados em delta. Em cada enrolamento existem 10 espiras, foi considerada uma resistência igual a 1Ω e foram desconsideradas as indutâncias de cabeça de bobina ($\ell = 0$). As tensões aplicadas diretamente aos terminais dos enrolamentos foram:

- $V_1 = 100\text{sen}(377t);$
- $V_2 = 100\text{sen}(377t + 120^\circ);$
- $V_3 = 100\text{sen}(377t - 120^\circ).$

5.5. Conclusão

Neste capítulo foram apresentados três simulação realizadas utilizando-se o programa EFCIR.

Nos dois primeiros exemplos foi dada maior atenção às grandezas elétricas, tensões e correntes, presentes nos diversos elementos do circuito. Para comparação de resultados foi utilizado o programa PSPICE. Algumas diferenças podem ser observadas em

formas de onda equivalentes obtidas pelos dois programas. Isto se deve principalmente ao modelo utilizado na representação dos interruptores do circuito. O programa EFCIR modela os interruptores como resistores, enquanto o programa PSPICE utiliza um modelo matemático complexo onde estão presentes a curva de resistência dinâmica dos dispositivos, suas capacitâncias internas, limitações de di/dt e dv/dt , entre outras características não lineares destes semicondutores. Esta diferença na modelagem dos semicondutores e, conseqüentemente, nas formas de onda obtidas não comprometem a eficiência do programa EFCIR, cujo objetivo é servir como ferramenta de análise dos dispositivos eletromagnéticos acoplados aos circuitos elétricos.

O terceiro exemplo trás a comparação das cartas de campos de um motor trifásico de ímãs permanentes obtidas utilizando-se o programa EFCIR e o programa EFCM, procurando evidenciar o outro aspecto do programa EFCIR, que é a determinação das grandezas eletromagnéticas presentes na estrutura e sua distribuição espacial.

Conclusão Geral

No presente trabalho é apresentado o método desenvolvido que permite a análise de dispositivos eletromagnéticos trifásicos alimentados por circuitos elétricos externos. É adotada a modelagem pelo Método de Elementos Finitos e pelo Método de Resíduos Ponderados para o equacionamento da estrutura eletromagnética. O circuito elétrico externo é equacionado em variáveis de espaço de estado e fortemente acoplado às equações de campo do dispositivo utilizando-se as variáveis comuns aos dois sistemas: as correntes e as tensões nos enrolamentos do dispositivo eletromagnético.

Para assegurar a independência linear do sistema matricial de equações que descreve o problema e garantir o número mínimo necessário presente de equações, adota-se um método para identificação da natureza dos enrolamentos declarados na topologia do circuito no momento da definição de sua árvore. Nos casos em que algum enrolamento é selecionado como ramo do circuito, uma readequação em sua topologia é efetuada, redefinindo uma nova árvore, onde este enrolamento é selecionado como um elo.

Neste trabalho são relatados três circuitos simples com a finalidade de testar o método, objetivando sua avaliação e posterior validação. O novo método, implementado na estrutura original do programa EFCIR, funciona de forma ampla, abrangendo as estruturas monofásicas e trifásicas, sem necessidade de se diferenciar os programas, criando-se um novo aplicativo.

Este método desenvolvido e o programa computacional implementado serão de grande importância na análise de estruturas eletromagnéticas trifásicas alimentadas por conversores estáticos. Este programa participa da evolução natural dos métodos de cálculos de campos eletromagnéticos. Inicialmente estes campos eram equacionados em função de densidades de corrente impostas aos enrolamentos das estruturas, pois essas são as fontes diretas destes campos. Em seguida passou-se ao equacionamento destes campos quando produzidos por uma tensão aplicada aos enrolamentos das estruturas, sendo a corrente determinada a partir desta alimentação. Esta forma de avaliação dos campos é mais natural, pois traduz a forma real como os dispositivos eletromagnéticos são alimentados. Finalmente, esta tensão aplicada às bobinas do dispositivo não precisa ter sua forma de onda pré-estabelecida, mas pode ser avaliada contínua e simultaneamente, durante a evolução dos cálculos. É neste ponto que o método aqui apresentado se encontra.

Como sugestão para trabalhos futuros, podemos citar:

- Estender o método proposto à máquinas elétricas rotativas e a dispositivos eletromagnéticos modelados em três dimensões;
- Estender o estudo para considerar as equações mecânicas nas estruturas eletromagnéticas;
- Desenvolver métodos de avaliação das perdas presentes em transformadores trifásicos.

Referências Bibliográficas:

- [1] BASTOS, J. P. A.; *Eletromagnetismo e Cálculo de Campos*. Ed. da UFSC, 2ª Edição, Florianópolis, 1992.
- [2] BOSE, B. K.; *Power Electronics and AC Drives*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
- [3] CHUA, L.; LIN, P.; *Computer-Aided Analysis of Electronic Circuits*. Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1975.
- [4] DAVAT, B.; *Modélisation des Dispositifs Électromagnétiques*. Thèse de Doctorat d'Etat, I. N. P. de Toulouse, França, 1984.
- [5] KUO-PENG, P.; *Simulação Numérica de Conversores Estáticos Conectados a Dispositivos Eletromagnéticos*. Relatório CNPq. Processo individual 360152/94-5, Processo institucional 620427/92-0.
- [6] KUO-PENG, P.; BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N.; CARLSON, R.; *Implementação da Malha de Realimentação na Simulação de um Conjunto Conversor/Estrutura Eletromagnética*. XI Congresso Brasileiro de Automática, Vol 2, pp 1083-1087, Setembro 1996, SP, Brasil.
- [7] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J. P. A.; CARLSON, R.; LAJOIE-MAZENC, M.; *Automatic Determination of Feeding Circuit Equations in a Combined Converter/Electromagnetic Device Analysis*. ELETRIMACS'96, September 1996. Saint-Nazaire, França.
- [8] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J. P. A.; CARLSON, R.; BATISTELA, N. J.; LAJOIE-MAZENC, M.; *A General Method for Coupling Static Converter with Electromagnetics Structures*. Proceedings of the 7th Biennial IEEE-CEFC'96, p.481, March 1996. Okayama, Japão.
- [9] KUO-PENG, P.; SADOWSKI, N.; BASTOS, J. P. A.; CARLSON, R.; BATISTELA, N. J.; LAJOIE-MAZENC, M.; *A General Method for Coupling Static Converter with*

Electromagnetics Structures. IEEE Transactions on Magnetics, Vol 33, No. 2, pp. 2004-2009, March 1997.

- [10] KUO-PENG, P.; BASTOS, J. P. A.; SADOWSKI, N.; CARLSON, R.; Analysis of a Combined Converter-Electromagnetic Device by Taking Into Account its Control Loops. Proceedings of the IEEE-IEMDC'97, pp.MB2-4.1-MB2-4.3, May 1997, Milwaukee, USA.
- [11] MESQUITA, R. C.; Cálculo de Campos Tridimensionais Utilizando Elementos Finitos: Magnetostática, Quase-Estática e Aquecimento Indutivo. Tese de Doutorado. Universidade Federal de Santa Catarina. CETD, UFSC, PEEL, Brasil, 1990.
- [12] RASHID, M.; *Power Electronics Circuits, Devices and Applications*. Prentice Hall Inc.; Englewoods Cliffs, New Jersey, 1993.
- [13] SADOWSKI, N.; Modélisation des Machines Électriques à Partir de la Résolution des Équations du Champ en Tenant Compte du Mouvement et du Circuit d'Alimentation (Logiciel EFCAD). Thèse de doctorat I.N.P. de Toulouse, França, 1993.
- [14] SADOWSKI, N.; Elementos Finitos Aplicados às Máquinas Elétricas. Curso de pós-graduação em Máquinas Elétricas – WEG S.A., 1996, Jaraguá do Sul, Brasil.
- [15] ORSINI, L. Q.; *Circuitos Elétricos*. Editora Edgard Blücher, SP, Brasil, 1971.